Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Цивильская средняя общеобразовательная школа №1
им. М.В.Силантьева»
Цивильского района Чувашской Республики

Элективный курс по математике 10 - 11 класс

Абсолютная величина
Уравнения, неравенства, системы, задачи с модулями

Составитель:

Ермеев Валерий Александрович,

учитель математики МБОУ «Цивильская средняя общеобразовательная школа №1 им. М.В.Силантьева» Цивильского района Чувашской Республики

Цивильск 2022

Пояснительная записка

Понятие абсолютной величины (модуля) является одной из важнейших характеристик числа как в области действительных, так и в области комплексных чисел.

Это понятие широко применяется не только в различных разделах школьного курса математики, но и в курсах высшей математики, физики и технических наук, изучаемых в вузах. Например, в теории приближенных вычислений используются понятия абсолютной и относительной погрешностей приближенного числа. В механике и геометрии изучаются понятия вектора и его длины (модуля вектора). В математическом анализе понятие абсолютной величины числа содержится в определениях таких основных понятий, как предел, ограниченная функция и др. Задачи, связанные с абсолютными величинами, часто встречаются на математических олимпиадах, вступительных экзаменах в вузы и на ЕГЭ.

Программой школьного курса математики не предусмотрены обобщение и систематизация знаний о модулях, их свойствах, полученных учащимися за весь период обучения. Данный пробел и пытается восполнить данный элективный курс.

Курс рассчитан на учащихся 10-11 классов общеобразовательных школ, проявляющих интерес к изучению математики. Курс позволит школьникам систематизировать, расширить и укрепить знания, связанные с абсолютной величиной, подготовиться для дальнейшего изучения тем, использующих это понятие, научиться решать разнообразные задачи различной сложности, способствует выработке и закреплению навыков работы на компьютере.

Учителю курс поможет наиболее качественно подготовить учащихся к математическим олимпиадам, сдаче ЕГЭ и экзаменов при поступлении в вузы.

Программа элективного курса предполагает знакомство с теорией и практикой рассматриваемых вопросов и рассчитана на 68 часов: 7 часов лекций и 61 часов практических занятий.

Цели курса: обобщение и систематизация, расширение и углубление знаний по теме «Абсолютная величина», обретение практических навыков выполнения заданий с модулем, повышение уровня математической подготовки школьников.

Задачи курса:

- вооружить учащихся системой знаний по теме «Абсолютная величина»;
- сформировать навыки, применяя данных знаний при решении разнообразных задач различной сложности;
- подготовить учащихся к ЕГЭ;
- сформировать навыки самостоятельной работы, работы в малых группах;
- сформировать навыки работы со справочной литературой, с компьютером;
- сформировать умения и навыки исследовательской работы;
- способствовать развитию алгоритмического мышления учащихся;
- способствовать формированию познавательного интереса к математике.

Учебно-тематический план

№ п/п	Тема занятий	Кол - во часов	Виды деятельности
1.	Определения модуля. Свойства модуля.	2	Лекция. Практическая работа.
2.	Способы решения уравнений и неравенств с модулями.	5	Лекция. Практическая работа.
3.	Уравнения и неравенства с модулями в ЕГЭ.	6	Беседа учителя, работа в группах. Практическая работа.
4.	Тригонометрические уравнения с модулями.	5	Изучение теории, составление справочника, самостоятельная работа. Практическая работа.
5.	Логарифмические уравнения и неравенства с модулями.	5	Беседа учителя, составление справочника, практическая работа
6.	Показательные уравнения и неравенства с мдулями.	5	Практическая работа.
7.	Иррациональные уравнения и неравенства с модулями.	5	Практическая работа.
8.	Уравнения и неравенства, включающие функции max и min.	5	Семинар, работа в группах, обучающая самостоятельная работа.
9.	Задание фигур на координатной плоскости уравнениями и неравенствами.	5	Практическая работа.
10.	Уравнения и неравенства с параметрами.	5	Практическая работа.
11.	Множество значений функции.	5	Практическая работа.
12.	Графики функций, содержащих переменную под знаком модуля.	5	Практическая работа.
13.	Системы уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.	5	Практическая работа.
14.	Нестандартные уравнения и неравенства с модулям.	4	Практическая работа.
15.	Итоговое занятие. Контрольная работа.	1	Зачет, защита решений.
16.	Итого:	68	

1. Определения модуля

Определение 1.

Абсолютной величиной числа a, или его модулем (обозначается $|a|$) называется само число, если оно неотрицательно, и ему противоположное, если число отрицательно, т.е.

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0,$$

$$|a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

Определение 2.

Абсолютной величиной числа a, или его модулем называется расстояние от начала координат до соответствующей числу a точки на числовой оси, т.е.

$$|a| = \rho(0; a)$$

$$-(-a) = |-a| = \rho(0; -a) = \rho(0; a) = |a| = a.$$

Определение 3.

Абсолютной величиной числа a, или его модулем называется наибольшее из двух чисел a и $(-a)$, т.е.

$$|a| = \max(a; -a).$$

Свойства модуля

1. Модули противоположных чисел равны, т.е. для всех a

$$|a| = |-a|.$$

2. Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа, т.е. для всех a

$$|a|^2 = a^2.$$

3. Арифметический корень из квадрата любого числа есть модуль этого числа, т.е.

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

4. Модуль любого числа есть число неотрицательное, т.е. для всех a

$$|a| \geq 0.$$

5. Модуль числа не меньше этого числа, т.е. т.е. для всех a

$$|a| \geq a.$$

6. Модуль числа не меньше ему противоположного числа, т.е. т.е. для всех a

$$|a| \geq -a.$$

7. Модуль числа a равен максимальному из двух противоположных чисел a и $(-a)$, т.е.

$$|a| = \max(a; -a). \qquad (1)$$

8. Равенство (1) можно представить в виде:

$$|a| = -\min(a; -a).$$

Свойства (7) и (8) выражают модуль произвольного числа через максимум и минимум. Оказывается и, наоборот, максимальное и минимальное число среди данных n чисел можно выразить через модули.

Например, если к полусумме двух чисел прибавить модуль их полуразности, то получим максимальное их них, а если из полусуммы двух чисел вычтем модуль их полуразности, то получим минимальное из них, т.е. для любых двух чисел u и v

$$\max(u; v) = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|), \text{ и } \min(u; v) = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|).$$

Аналогичные соотношения можно получить и для большего количества чисел.

Например, $\max(u;v;w)=\max(\max(u;v);w)$ = $\frac{1}{2}\left(\max(u;v)+w+|\max(u;v)-w|\right)$ =

= $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(u+v+|u-v|)+w+\left|\frac{1}{2}(u+v+|u-v|)-w\right|\right)$, и $\min(u;v;w)=\min(\min(u;v);w)$ = =

= $\frac{1}{2}\left(\min(u;v)+w-|\min(u;v)-w|\right)$ = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(u+v-|u-v|)+w-\left|\frac{1}{2}(u+v-|u-v|)-w\right|\right)$, и т.д.

9. Модуль числа равен расстоянию на числовой оси от начала отсчета до данного числа, т.е. для любого a $|a|=\rho(0;a)$.

10. Свойство 9 равносильно утверждению, что $|a-b|=\rho(a;b)$.

Указанные свойства позволяют осознать следующие схемы решения основных уравнений и неравенств с модулем:

1. $|f|<\varphi \Leftrightarrow -\varphi<f<\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} f<\varphi, \\ f>-\varphi. \end{cases}$

2. $|f|\le\varphi \Leftrightarrow -\varphi\le f\le\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} f\le\varphi, \\ f\ge-\varphi. \end{cases}$

3. $|f|>\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f>\varphi, \\ f<-\varphi. \end{array}\right.$

4. $|f|\ge\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\ge\varphi, \\ f\le-\varphi. \end{array}\right.$

5. $|f|=\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f=\varphi, \\ f=-\varphi. \end{array}\right. \end{cases}$

6. $a<0 \Leftrightarrow \frac{|a|}{a}+1=0.$

7. $a\le 0 \Leftrightarrow |a|+a=0.$

8. $a\ge 0 \Leftrightarrow |a|-a=0.$

9. $a>0 \Leftrightarrow \frac{|a|}{a}-1=0.$

11. Числа неотрицательны тогда и тогда, когда их сумма равна сумме модулей этих чисел, т.е.

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|=u_1+u_2+\ldots+u_n \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\ge 0, \\ u_2\ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_n\ge 0. \end{cases}$$

12. Числа неположительны тогда и тогда, когда сумма их модулей противоположны сумме этих чисел, т.е.

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|=-u_1-u_2-\ldots-u_n \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\le 0, \\ u_2\le 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_n\le 0. \end{cases}$$

13. Числа одновременно неотрицательны или одновременно неположительны тогда и только тогда, когда сумма их модулей равна модулю их суммы, т.е.

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|=|u_1+u_2+\ldots+u_n| \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\ge 0, \\ u_2\ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_n\ge 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u_1\le 0, \\ u_2\le 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_n\le 0. \end{cases}$$

В частности получаем

14. $|u|+|v|=|u+v| \Leftrightarrow uv\ge 0.$

15. $|u|+|v|=|u-v| \Leftrightarrow\ uv \le 0.$

16. $|u|+|v|=\big||u|-|v|\big| \Leftrightarrow uv=0.$

Из (16) следует:

1. Точка прямой тогда и только тогда принадлежит отрезку этой прямой, когда сумма расстояний от точки до концов отрезка равна длине отрезка.

С помощью свойства (10) это можно записать следующим образом $(a \le b)$:

$|x-a|+|x-b|=b-a \Leftrightarrow a \le x \le b.$

Полученную равносильность можно получить как частный случай из свойства (16), если положить, что $u=x-a, v=x-b.$ Имеем в силу (16) $|x-a|+|x-b|=|a-b| \Leftrightarrow (x-a)(x-b)\le 0.$ И если $a \le b,$ то $|a-b|=b-a$ и неравенство $(x-a)(x-b)\le 0$ равносильно двойному неравенству $a \le x \le b.$

2. Точка прямой тогда и только тогда лежит вне отрезка этой прямой, когда модуль разности расстояний от точки до концов отрезка равна длине отрезка.

С помощью модулей это можно записать в виде:

$$\big||x-a|-|x-b|\big|=|a-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \min(a;b), \\ x \ge \max(a;b). \end{array}\right.$$

Пример. Решите уравнение $\big||x-1|-|x-3|\big|=2.$

Решение: Если положить $a=1, b=3,$ то данное уравнение равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} |x| \le 1, \\ |x| \ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3]\cup[-1;1]\cup[3;+\infty).$

Ответ: $(-\infty;-3]\cup[-1;1]\cup[3;+\infty).$

17. Если модули чисел равны, то числа либо равны, либо противоположны, т.е.

$$|u|=|v| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v, \\ u=-v. \end{array}\right.$$

18. Сравнение модулей двух чисел равносильно сравнению их квадратов, т.е. $|f| \vee |\varphi| \Leftrightarrow f^2 \vee \varphi^2,$ где символ «$\vee$» может быть любым из пяти символов «$<$», «$\le$». «=», «$>$», «$\ge$», т.е.

1. $|f|<|\varphi| \Leftrightarrow f^2<\varphi^2,$
2. $|f|>|\varphi| \Leftrightarrow f^2>\varphi^2,$
3. $|f|\le|\varphi| \Leftrightarrow f^2\le\varphi^2,$
4. $|f|\ge|\varphi| \Leftrightarrow f^2\ge\varphi^2,$
5. $|f|=|\varphi| \Leftrightarrow f^2=\varphi^2.$

19. Модуль произведения чисел равен произведению модулей чисел, а модуль частного – частному модулей, т.е.

$$|u\cdot v|=|u|\cdot|v|,\ \left|\frac{u}{v}\right|=\frac{|u|}{|v|}, v\ne 0.$$

20. Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин зтих чисел:

$$|u|+|v| \le |u|+|v|.$$

21. Абсолютная величина разности двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел:

$$|u-v| \le |u|+|v|.$$

<u>**Упражнения**</u>

1. Вычислить $|a|$, если 1) $a=3;$ 2) $a=-5;$ 3) $a=2-\sqrt{3};$ 4) $a=\pi-4.$

2. Преобразовать заданную функцию к такому виду, чтобы в записи аналитического выражения функции не использовались знаки модулей:

1. $y = |x-3|$.
2. $y = 3-|x|$.
3. $y = |2x+4|+3x$.
4. $y = |x-1|+|x-2|$.
5. $y = x+\dfrac{x}{|x|}$.
6. $y = x+\dfrac{x-2}{|x-2|}+|x-1|$.
7. $y = |x|+|2x+4|-|3-x|$.
8. $y = (x-5)|x-1|$.
9. $y = -2x^2+|x+3|$.
10. $y = |x^2-4|+|x+3|$.
11. $y = |x^2-2x+5|+|x+3|$.
12. $y = |x^2-6x+9|$.

3. Упростите выражения:

1. $\dfrac{6(a^3+27)|a+4|}{(a^2-3a+9)(a^2+7a+12)}$.

Ответ: -6 при $a \in (-\infty;-4)$;
6 при $a \in (-4;+\infty)$.

2. $\dfrac{|x-1|(x^2+x+2)(x+1)x}{x^3-1-|x-1|}$.

Ответ: $-x(x+1)$ при $x \in (-\infty;1)$;
x^2+x+2 при $x \in (1;+\infty)$.

3. $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

Ответ: $-\dfrac{a}{2}$ при $a \in (-\infty;-2)$;
$\dfrac{a(a-1)}{2}$ при $a \in (-2;+\infty)$.

4. $\dfrac{m\cdot|m-3|}{(m^2-m-6)\cdot|m|}$.

Ответ: $\dfrac{1}{m+2}$ при $m \in (-\infty;0)\cup(3;+\infty)$;
$-\dfrac{1}{m+2}$ при $m \in (0;3)$.

5. $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$.

Ответ: $\dfrac{1}{1-3x}$ при $x \in (-\infty;0)$;
$\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$ при $x \in \left[0;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};1\right)$;
$\dfrac{1}{x-2}$ при $x \in (1;+\infty)$.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|$.

Ответ: $\dfrac{3-x^2}{x+2}$ при $x \in (-\infty;-2)$;
$\dfrac{5-x^2}{x+2}$ при $x \in (-2;2)$;
$\dfrac{x^2-3}{x+2}$ при $x \in [2;+\infty)$.

7. $\sqrt{y^2-6y+9}-|y-9|+2$.

Ответ: -4 при $y \in (-\infty;3)$;
$2y-10$ при $y \in [3;9)$;
8 при $y \in [9;+\infty)$.

2. Способы решения уравнений и неравенств с модулями

Способ 1. Геометрическая интерпретация модуля при решении уравнений и неравенств.

Геометрический смысл модуля разности величин – это расстояние между ними. Например, геометрический смысл выражения $|x-a|$ - длина отрезка координатной оси, соединяющего точки с абсциссами x и a. Перевод алгебраической задачи на геометрический язык часто позволяет избежать громоздких выкладок.

Пример 1. Решите уравнение $|x| = 3$.

Решение: Написанное уравнение геометрически означает, что расстояние от точки x до начала координат равно 3, т.е. x = 3 или x = -3.

Ответ: -3; 3.

Пример 2. Решите уравнение $|x+5| = 2$.

Решение: Число $|x+5| = |x-(-5)|$ есть расстояние между точками x и -5. Написанное уравнение геометрически означает, что расстояние от точки x до точки -5 равно 2.

Откладывая на числовой оси от точки -5 отрезок длиной 2 (в обе стороны), получим x = -7 или x = -3

Ответ: -7; -3.

Пример 3. Решите уравнение $|3-2x| = 1$.

Решение: Сначала делаем преобразования: $|3-2x| = |2x-3| = 2\left|x-\frac{3}{2}\right|$, откуда $2\left|x-\frac{3}{2}\right| = 1$, $\left|x-\frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Написанное уравнение геометрически означает, что расстояние от точки x до точки $\frac{3}{2}$ равно $\frac{1}{2}$. Откладывая на числовой оси от точки $\frac{3}{2}$ отрезок длиной $\frac{1}{2}$ (в обе стороны), получим x = 1 или x = 2.

Ответ: 1; 2.

Пример 4. Решите уравнение $|x-1| = |x+3|$.

Решение: Число $|x-1|$ есть расстояние между точками x и 1, а число $|x+3|$ - расстояние между точками x и -3. Написанное уравнение геометрически формулируется следующим образом: точка x находится на одинаковом расстоянии от точек 1 и -3. Иначе говоря, x - середина отрезка с концами в точках 1 и -3, т.е. $x = -1$.

Ответ: -1.

Пример 5. Решите уравнение $|x-1| + |x-2| = 1$.

Решение: Исходя из геометрической интерпретации модуля, левая часть представляет собой сумму расстояний от некоторой точки с абсциссой x до двух фиксированных точек с абсциссами 1 и 2. Тогда все точки с абсциссами из отрезка $[1;2]$ обладают требуемым свойством, а точки, расположенные вне этого отрезка – нет.

Ответ: $[1;2]$.

Пример 6. Решите уравнение $|x-1| - |x-2| = 1$.

Решение: Исходя из геометрической интерпретации модуля, получим, что разность расстояний до точек с абсциссами 1 и 2 равна единице только для точек, расположенных на координатной оси правее числа 2.

Ответ: $[2;+\infty)$..

Пример 7. Решите неравенство $|x| \le 2$.

Решение: Написанное неравенство геометрически означает, что расстояние от точки x до начала координат меньше или равно 2.

Ответ: $[-2;2]$.

Пример 8. Решите неравенство $|-1-2x| \ge 3$.

Решение: Делаем преобразования: $|-1-2x|\ge 3,\ |2x+1|\ge 3,\ 2\left|x+\frac{1}{2}\right|\ge 3,\ \left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|\ge \frac{3}{2}.$

Написанное неравенство геометрически означает, что расстояние от точки *x* до точки $-\frac{1}{2}$ больше или равно $\frac{3}{2}$.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство $|x+1|+|x-1|>2.$

Решение: Изобразим на координатной прямой точки, сумма расстояний от которых до точек -1 и 1 в точности равна 2. Это все точки отрезка $[-1;1]$. Тогда, что для всех чисел вне данного отрезка сумма расстояний будет больше двух.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Примечание: обобщением решения вышеприведенных уравнений является следующие равносильные переходы:

$$|x-a|+|x-b|=b-a, b\ge a \Leftrightarrow a\le x\le b$$

$$|x-a|-|x-b|=b-a, b\ge a \Leftrightarrow x\ge b.$$

Решите уравнения и неравенства:

1. $|x-1|+|x+2|\le 3.$ Ответ: $-2\le x\le 1.$
2. $|x-10|=5.$ Ответ: 5; 15.
3. $|x-10|<5.$ Ответ: $(5;15)$.
4. $|x-10|>5.$ Ответ: $(-\infty;5)\cup(15;+\infty)$.
5. $|x+4|+|x-3|=7.$ Ответ: $-4\le x\le 3.$
6. $|5x+2|\le 3.$ Ответ: $-1\le x\le 1/5.$

<u>Способ 2. Замены множителей с модулем</u>

Опорная информация, позволяющая указать удобные замены, заключаются в двух основных свойствах модуля:

- $|m|^2=m^2$ и $|m|\ge 0$ для всех *m*,
- а также в монотонном возрастании на множестве неотрицательных чисел функции $y=t^2$.

Замена незнакопостоянных множителей с модулем и корнями:

- $|f(x)|-|g(x)|\leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)).$ (1)
- $|f(x)|-g(x)\overset{g(x)\ge 0}{\leftrightarrow}(f(x)-g(x))(f(x)+g(x)).$ (2)
- $|f(x)|-\sqrt{g(x)}\overset{g(x)\ge 0}{\leftrightarrow} f^2(x)-g(x).$ (3)
- $|f(x)|-\sqrt{|g(x)|}\leftrightarrow (f^2(x)-g(x))(f^2(x)+g(x)).$ (4)
- $\sqrt{|f(x)|}-\sqrt{|g(x)|}\leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)).$ (5)
- $g(x)-|f(x)|\overset{g(x)\ge 0}{\leftrightarrow}(g(x)-f(x))(g(x)+f(x)).$ (6)
- $\sqrt{g(x)}-|f(x)|\overset{g(x)\ge 0}{\leftrightarrow} g(x)-f^2(x).$ (7)
- $\sqrt{|g(x)|}-|f(x)|\leftrightarrow (g(x)-f^2(x))(g(x)+f^2(x)).$ (8)

- $\left|f(x)\right|-\left(ax^2+bx+c\right)\overset{a>0,D\le 0}{\leftrightarrow}$ (9)
  $\left(f(x)-ax^2-bx-c\right)\left(f(x)+ax^2+bx+c\right).$
- $\left(ax^2+bx+c\right)-\left|f(x)\right|\overset{a>0,D\le 0}{\leftrightarrow}$ (10)
  $\left(ax^2+bx+c-f(x)\right)\left(ax^2+bx+c+f(x)\right).$

Пример 1. Решите неравенство $\left|4x^3-x+7\right|\le\left|2x^3+5x+3\right|.$

Решение: Воспользуемся (1):

$$\left|4x^3-x+7\right|\le\left|2x^3+5x+3\right| \Leftrightarrow \left|4x^3-x+7\right|-\left|2x^3+5x+3\right|\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^3-x+7\right)^2-\left(2x^3+5x+3\right)^2\le 0 \Leftrightarrow \left(6x^3+4x+10\right)\left(2x^3-6x+4\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^3+2x+5\right)\left(x^3-3x+2\right)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(3x^2-3x+5\right)(x-1)\left(x^2+x-2\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x+2)\le 0 \Leftrightarrow x\in[-2;-1]\cup\{1\}.$$

Ответ: $[-2;-1]\cup\{1\}.$

Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{\left(|x-2|-4-x^2\right)\left(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2}\right)}{\left(|1-x|-4\right)\left(|3+x|-|x-5|\right)}>0.$

Решение: Каждый множитель как в числителе, так и в знаменателе есть разность неотрицательных чисел. Поэтому заменяя их на разность квадратов, получим равносильное неравенство в области допустимых значений. Имеем:

$$\frac{\left(|x-2|-4-x^2\right)\left(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2}\right)}{\left(|1-x|-4\right)\left(|3+x|-|x-5|\right)}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\left(|x-2|^2-\left(4+x^2\right)^2\right)\left(|x+4|^2-\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2\right)}{\left(|1-x|^2-4^2\right)\left(|3+x|^2-|x-5|^2\right)}>0,\\ x^2-x-2\ge 0.\end{cases}$$

Пользуясь свойством модуля $|m|^2=m^2$ и раскладывая на множители разности квадратов, получим:

$$\begin{cases}\dfrac{\left((x-2)^2-\left(4+x^2\right)^2\right)\left((x+4)^2-x^2+x+2\right)}{\left((1-x)^2-4^2\right)\left((3+x)^2-(x-5)^2\right)}>0,\\ x\le 1\cup x\ge 2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\left(-x^2+x-6\right)\left(x^2+x+2\right)(9x+18)}{8(-x-3)(5-x)(2x-2)}>0,\\ x\le 1\cup x\ge 2,\end{cases}$$

Знакопостоянные множители $-x^2+x-6$ и x^2+x+2 можно заменить на единицу со знаком старшего коэффициента, т.е. на (-1) и 1 соответственно.

$$\begin{cases}\dfrac{-1\cdot 1\cdot(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)}>0,\\ x\le 1\cup x\ge 2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+2}{(x+3)(x-5)(x-1)}<0,\\ x\le 1\cup x\ge 2,\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup[2;5).$$

Ответ: $(-3;-2)\cup[2;5).$

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{\left|x^2-2x\right|+2x-1}{x^2-x+\left|x^2+3x\right|}>0.$

Решение: $\dfrac{\left|x^2-2x\right|+2x-1}{x^2-x+\left|x^2+3x\right|}>0 \Leftrightarrow \dfrac{\left|x^2-2x\right|-(1-2x)}{\left|x^2+3x\right|-\left(x-x^2\right)}>0.$

В этом неравенстве нельзя множители $\left|x^2-2x\right|-(1-2x)$ и $\left|x^2+3x\right|-\left(x-x^2\right)$ рассматривать как разности неотрицательных величин, так как выражения $1-2x$ и $x-x^2$ в ОДЗ могут принимать как положительные так и отрицательные значения.

$1-2x>0$ при $x<0{,}5$, а $x-x^2>0$ при $0<x<1$.

1. При $x<0$ $1-2x>0$, а $x-x^2<0$.

Замена множителей: $\left|x^2-2x\right|-(1-2x)\leftrightarrow\left(x^2-2x\right)^2-(1-2x)^2=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4x+1\right)=$
$=(x+1)(x-1)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$, $\left|x^2+3x\right|-\left(x-x^2\right)\leftrightarrow 1$, $x\neq 0$, т.к. $0\notin ОДЗ$.

Имеем систему:

$$\begin{cases}(x+1)(x-1)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)>0\\ x<0,\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1).$$

2. При $x\in(0;0{,}5]$ $1-2x>0$, а $x-x^2>0$.

Замена множителей: $\left|x^2-2x\right|-(1-2x)\leftrightarrow(x+1)(x-1)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.

$\left|x^2+3x\right|-\left(x-x^2\right)\leftrightarrow\left(x^2+3x\right)^2-\left(x-x^2\right)^2=4x\left(2x^2+2x\right)=8x^2(x+1)$.

Имеем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x+1)\left(x-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)}{x^2(x+1)}>0,\\ 0<x\le 0{,}5,\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(2-\sqrt{3};0{,}5\right].$$

3. При $x\in(0{,}5;1]$ $1-2x<0$, а $x-x^2>0$.

Замена множителей: $\left|x^2-2x\right|-(1-2x)\leftrightarrow 1$, $\left|x^2+3x\right|-\left(x-x^2\right)\leftrightarrow 8x^2(x+1)$.

Имеем систему: $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2(x+1)}>0,\\ 0{,}5<x\le 1,\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0{,}5;1]$.

4. При $x\in(1;+\infty)$ $1-2x<0$, а $x-x^2<0$.

Замена множителей: $\left|x^2-2x\right|-(1-2x)\leftrightarrow 1$, $\left|x^2+3x\right|-\left(x-x^2\right)\leftrightarrow 1$.

Имеем систему: $\begin{cases}1>0,\\ x>1,\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1;+\infty)$.

Объединяя четыре случая, получаем окончательный ответ. $x\in(-\infty;-1)\cup\left(2-\sqrt{3};+\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(2-\sqrt{3};+\infty\right)$.

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{4x}{|x-2|-1}\ge 3$.

Решение: $\dfrac{4x}{|x-2|-1}\ge 3\Leftrightarrow\dfrac{4x}{|x-2|-1}-3\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{3|x-2|-(4x+3)}{|x-2|-1}\le 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x+3<0,\\ |x-2|-1<0.\end{cases}\\ \begin{cases}4x+3\ge 0,\\ \dfrac{(3(x-2))^2-(4x+3)^2}{(x-2)^2-1^2}\le 0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x\in\left[\dfrac{3}{7};1\right)\cup(3;+\infty),\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{3}{7};1\right)\cup(3;+\infty).$$

Ответ: $[3/7;1)\cup(3;+\infty)$.

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{3}{2}x^2-|x|\ge 0$.

Решение:

$$\frac{3}{2}x^2-|x|\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}|x|^2-|x|\ge 0 \Leftrightarrow |x|\left(|x|-\frac{2}{3}\right)\ge 0 \Leftrightarrow x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right).$$

Ответ: $(-\infty;-2/3]\cup\{0\}\cup[2/3;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенство:

1. $|x+5|>11$.

Ответ: $(-\infty;-16)\cup(6;+\infty)$.

2. $|2x-4|\le 1$.

Ответ: $[1{,}5;2{,}5]$.

3. $|2x-1|<|4x+1|$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

4. $|x+8|\le 3x-1$.

Ответ: $[4{,}5;+\infty)$.

5. $|1-2x|>3-x$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(4/3;+\infty)$.

6. $x^2+5|x|-24>0$.

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

7. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$.

Ответ: $(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5)$.

8. $|x^2-4|(x^2-4x+3)\le 0$.

Ответ: $\{-2\}\cup[1;3]$.

9. $\dfrac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|}<\dfrac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

Ответ: $(-13;-4)\cup(-4;-1)$.

10. $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

Ответ: $(3;4)\cup(4;7)$.

11. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\ge 1$.

Ответ $(-\infty;-2)\cup(-2;0]\cup[1{,}6;2)\cup(2;2{,}5]$.

12. $\dfrac{x^2+3|x|-10}{x^2-4|x|-12}>0$.

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(-2;2)\cup(6;+\infty)$.

13. $\dfrac{(|x^2-4|-5)\cdot(|x+5|-8)}{(|x-3|-|x-1|)\cdot|x|}>0$.

Ответ: $(-\infty;-13)\cup(-3;0)\cup(0;2)$.

14. $\dfrac{2x-|3-x|}{|3-x|+2}<1$.

Ответ: $(-\infty;2)$.

15. $|x^2-4x+3|+2<2|x-1|+|x-3|$.

Ответ: $(0;1)\cup(2;5)$.

16. $3|x-1|>(x-1)^2+2$.

Ответ: $(-1;0)\cup(2;3)$.

17. $\dfrac{|x^2-5x+4|}{|x^2-4|}<1$.

Ответ: $(0;1{,}6)\cup(2{,}5;+\infty)$.

18. $\dfrac{|9x^2-10x+1|}{|9x^2-1|}<1$.

Ответ: $(0;1/5)\cup(5/9;+\infty)$.

19. $\dfrac{|x-3|-|x-2|}{|x+1|+x+1}\ge 0$.

Ответ: $(-1;2{,}5]$.

20. $\dfrac{|x-7|-|x-3|}{x-8-|x-8|}\ge 0$.

Ответ: $[4;8)$.

21. $(|x|-1)(2x^2+x-1)\le 0$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2};1\right]\cup\{-1\}$.

22. $\dfrac{4x}{|x-2|-1}\ge 3$.

Ответ: $[3/7;1)\cup(3;+\infty)$.

23. $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\le 0$.

24. $\dfrac{|x-2|}{x+4}<1$.

Ответ: $(-\infty;-4)\cup(-1;+\infty)$.

Ответ: $x<1/3$.

25. $\dfrac{|x-2|+1}{|2x+3|-7}\le 0$.

Ответ: $(-5;2)$.

26. $\dfrac{4|2-x|}{4|x|}-|x-2|\le 0$.

Ответ: $(-\infty;-4)\cup\{0;2\}\cup(4;+\infty)$.

27. $\dfrac{1}{|x-1|}>\dfrac{1}{|x+1|}$.

Ответ: $(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Способ 3. Способ последовательного раскрытия модуля.

Опорная информация:

$$|a|=a,\ \text{если}\ a\ge 0,$$
$$|a|=-a,\ \text{если}\ a<0.$$

Пример. Решите уравнение $\big||x-3|-x+1\big|+x=6$.

Решение: $\big||x-3|-x+1\big|+x=6 \Leftrightarrow \begin{cases}x-3<0,\\ \big|-(x-3)-x+1\big|+x=6,\end{cases}$ или $\begin{cases}x-3\ge 0,\\ \big|(x-3)-x+1\big|+x=6,\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x<3,\\ |-2x+4|+x=6,\end{cases}$ или $\begin{cases}x\ge 3,\\ |-2|+x=6,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3,\\ -2x+4<0,\\ -(-2x+4)+x=6,\end{cases}$ или $\begin{cases}x<3,\\ -2x+4\ge 0,\\ (-2x+4)+x=6,\end{cases}$

или $\begin{cases}x\ge 3,\\ x=4,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3,\\ x>2,\\ x=10/3,\end{cases}$ или $\begin{cases}x<3,\\ x\le 2,\\ x=-2,\end{cases}$ или $x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=4.\end{array}\right.$

Ответ: $x=-2;\ x=4$.

Решите уравнения и неравенства:

1. $\big|2x-|x-2|\big|<3$. Ответ: $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{5}{3}$.
2. $\big|2x+1-|3x+1|\big|\le x+2$. Ответ: $x\ge -\dfrac{2}{3}$.
3. $|x+2|+|x-3|<7$. Ответ: $-3<x<4$.
4. $|x-1|+|x-3|=2x-4$. Ответ: $x\ge 3$.
5. $\big||x^2-3x|-5\big|=x+1$. Ответ: $2;2+\sqrt{10};1+\sqrt{5}$.

Способ 4. Метод схем равносильности.

Опорная информация:

1. $|f|<\varphi \Leftrightarrow -\varphi<f<\varphi \Leftrightarrow \begin{cases}f<\varphi,\\ f>-\varphi.\end{cases}$
2. $|f|\le\varphi \Leftrightarrow -\varphi\le f\le\varphi \Leftrightarrow \begin{cases}f\le\varphi,\\ f\ge-\varphi.\end{cases}$
3. $|f|>\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f>\varphi,\\ f<-\varphi.\end{array}\right.$
4. $|f|\ge\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f\ge\varphi,\\ f\le-\varphi.\end{array}\right.$
5. $|f|=\varphi \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}f=\varphi,\\ f=-\varphi.\end{array}\right.\end{cases}$
6. $a<0 \Leftrightarrow \dfrac{|a|}{a}+1=0$.
7. $a\ge 0 \Leftrightarrow |a|-a=0$.
8. $a\le 0 \Leftrightarrow |a|+a=0$.

9. $a > 0 \Leftrightarrow \frac{|a|}{a} - 1 = 0.$

Пример. Решите неравенства $\left||x^3 + x - 3| - 5\right| \le x^3 - x + 8.$

Решение: $\left||x^3 + x - 3| - 5\right| \le x^3 - x + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + x - 3| - 5 \le x^3 - x + 8, \\ |x^3 + x - 3| - 5 \ge -x^3 + x - 8, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + x - 3| \le x^3 - x + 13, \\ |x^3 + x - 3| \ge -x^3 + x - 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^3 + x - 3 \le x^3 - x + 13, \\ x^3 + x - 3 \ge -x^3 + x - 13, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x^3 + x - 3 \ge -x^3 + x - 3, \\ x^3 + x - 3 \le x^3 - x + 3, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \le 8, \\ x^3 \ge -5, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x^3 \ge 0, \\ x \le 3, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[3]{5} \le x \le 8, \\ x \in R, \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt[3]{5} \le x \le 8.$$

Ответ: $-\sqrt[3]{5} \le x \le 8.$

Решите уравнения и неравенства:

1. $\frac{-x^3 + 7}{x^2 - 8x + 13} = \left|\frac{x^3 - 7}{x^2 - 8x + 13}\right|.$ Ответ: $(-\infty; \sqrt[3]{7}] \cup (4 - \sqrt{3}; 4 + \sqrt{3}).$
2. $\left||x^3 - x - 1| - 5\right| \ge x^3 + x + 8.$ Ответ: $x \le -\sqrt[3]{6}.$
3. $\left||2x^2 - x| - 3\right| \le 2x^2 + x + 5.$ Ответ: $x \ge -4.$
4. $|2x + 5| < 7 - x.$ Ответ: $-12 < x < \frac{2}{3}.$
5. $|x - 1| + |x + 2| \le 3.$ Ответ: $-2 \le x \le 1.$
6. $|5 - 3x| = 2x + 1.$ Ответ: $\frac{4}{5}; 6.$
7. $\left|\frac{x^2 + 2x + 1}{x}\right|. = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}.$ Ответ: $\{-1\} \cup (0; +\infty).$
8. $|7x + 5| - 2x \ge 11.$ Ответ: $\left(-\infty; -\frac{16}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{5}; +\infty\right).$
9. $(x^2 - 5x - 3)(x + 7) = |(x^2 - 5x - 3)(x + 7)|.$ Ответ: $\left[-7; \frac{5 - \sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{37}}{2}; +\infty\right).$

<u>Способ 5. Способ возведения в квадрат.</u>

Опорная информация:

1. Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа, т.е. для всех a

$$|a|^2 = a^2.$$

2. Сравнение модулей двух чисел равносильно сравнению их квадратов, т.е. $|f| \vee |\varphi| \Leftrightarrow f^2 \vee \varphi^2$, где символ «$\vee$» может быть любым из пяти символов «$<$», «$\le$». «=», «$>$», «$\ge$», т.е.

1. $|f| < |\varphi| \Leftrightarrow f^2 < \varphi^2,$
2. $|f| > |\varphi| \Leftrightarrow f^2 > \varphi^2,$
3. $|f| \le |\varphi| \Leftrightarrow f^2 \le \varphi^2,$
4. $|f| \ge |\varphi| \Leftrightarrow f^2 \ge \varphi^2,$
5. $|f| = |\varphi| \Leftrightarrow f^2 = \varphi^2.$

3. Из равенства $|f|=\varphi$ следует равенство $f^2=\varphi^2$.

При решении данного уравнения могут появиться лишние корни. Поэтому в решении способом возведения в квадрат, при переходе от уравнения $|f|=\varphi$ к уравнению $f^2=\varphi^2$ необходимо каким-либо способом отобрать лишние корни. Это возможно или путем прямой подстановки в исходное уравнение в случае получения конечного числа корней, или путем установления для получаемых решений выполнения дополнительных условий (например, выполнения условия $\varphi\ge 0$).

Пример. Решите неравенство $\left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|}<\left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}$.

Решение:

$$\left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|}<\left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|} \Leftrightarrow |x+7|<|x^2-3x+2| \Leftrightarrow (x+7)^2<(x^2-3x+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)^2-(x+7)^2>0 \Leftrightarrow (x^2-4x-5)\cdot(x^2-2x+9)>0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-5)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

Решите уравнения и неравенства:

1. $|2x+1|=|x+2|$. Ответ: -1; 1.
2. $|x^2-1|=|x^3-x^2-1|$. Ответ: $0;2;\sqrt[3]{2}$.
3. $|x^2-x-1|\le 5$. Ответ: $[-2;3]$.
4. $\left|\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}\right|\le 1$. Ответ: $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right]\setminus\{-1\}$.
5. $5^{|2-4x|}=5^{|4-6x|}$. Ответ: 0,6; 1.
6. $|x-a|=|x-2|$, где a - параметр. Ответ: $x=\frac{1}{2}(a+2)$ при $a\ne 2$; $x\in R$ при $a=2$.

<u>Способ 6. Метод интервалов.</u>

Опорная информация:

Значения переменной x разбивают область определения уравнения (неравенства) на интервалы, на каждом из которых любое выражение под знаком модуля для всех значений x имеет «один и тот же знак», т.е. либо всегда отрицательно, либо – положительно.

Пример. Решите неравенство $|5x-13|-|6-5x|\ge 7$.

Решение: Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем координатную ось на три области: $x\ge 13/5$, $6/5<x<13/5$, $x\le 6/5$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 13/5,\\ 5x-13+6-5x\ge 7,\end{cases}\\ \begin{cases}6/5<x<13/5,\\ -5x+13+6-5x\ge 7,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 6/5,\\ -5x+13-6+5x\ge 7,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 13/5,\\ 0x\ge 14,\end{cases}\\ \begin{cases}6/5<x<13/5,\\ -10x\ge -12,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 6/5,\\ 0x\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x\in\varnothing,\\ x\le 6/5,\end{array}\right. \Leftrightarrow x\le 6/5.$$

Ответ: $x\le 6/5$.

Решите уравнения и неравенства:

1. $|x|+|x+2|=2.$ Ответ: $-2\le x\le 0.$
2. $|x-1|\le|2x-3|-|x-2|.$ Ответ: $(-\infty;1]\cup[2;+\infty).$
3. $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\le 0.$ Ответ: $x<\dfrac{1}{3}.$
4. $\dfrac{x+1}{|x-1|}\ge 1.$ Ответ: $[0;1)\cup(1;+\infty).$
5. $|2x+8|\ge 8-|1-x|.$ Ответ: $(-\infty;-5]\cup[-1;+\infty).$
6. $\dfrac{6}{|x-1|-3}\ge|x+1|.$ Ответ: $[-4;-2]\cup[4;5].$
7. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}>2.$ Ответ: $x\in\varnothing.$

Способ 7. Способ специальных схем равносильности.

Опорная информация:

1. Числа неотрицательны тогда и тогда, когда их сумма равна сумме модулей этих чисел, т.е.

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|=u_1+u_2+\ldots+u_n\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\ge 0,\\ u_2\ge 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ u_n\ge 0.\end{cases}$$

2. Числа неположительны тогда и тогда, когда сумма их модулей противоположны сумме этих чисел, т.е.

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|=-u_1-u_2-\ldots-u_n\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\le 0,\\ u_2\le 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ u_n\le 0.\end{cases}$$

3. Числа одновременно неотрицательны или одновременно неположительны тогда и только тогда, когда сумма их модулей равна модулю их суммы, т.е.

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|=|u_1+u_2+\ldots+u_n|\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\ge 0,\\ u_2\ge 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ u_n\ge 0.\end{cases}\text{ или }\begin{cases}u_1\le 0,\\ u_2\le 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ u_n\le 0.\end{cases}$$

В частности получаем

4. $|u|+|v|=|u+v|\Leftrightarrow\ uv\ge 0.$

5. $|u|+|v|=|u-v|\Leftrightarrow\ uv\le 0.$

6. $|u|+|v|=\big||u|-|v|\big|\Leftrightarrow uv=0.$

7. $|u|+|v|=u-v\Leftrightarrow\begin{cases}u\ge 0,\\ v\le 0.\end{cases}$

8. $|u|+|v|=u+v\Leftrightarrow\begin{cases}u\ge 0,\\ v\ge 0.\end{cases}$

Пример 1. Решите неравенство $|2x-6|+|5-x|\le|x-1|.$

Решение: Так как $(2x-6)+(5-x)=x-1$, то в силу свойства (18) равносильно неравенству $(2x-6)(5-x)\ge 0 \Leftrightarrow 3\le x\le 5.$

Ответ: $3\le x\le 5.$

Пример 2. Решите уравнение $|x-1|\cdot|x+1|+|x-2|\cdot|x-3|-5x+7=0.$

Решение:

$|x-1|\cdot|x+1|+|x-2|\cdot|x-3|-5x+7=0 \Leftrightarrow |x^2-1|+|x^2-5x+6|-5x+7=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x^2-1|+|x^2-5x+6|=5x-7 \Leftrightarrow |x^2-1|+|x^2-5x+6|=(x^2-1)-(x^2-5x+6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ x^2-5x+6\le 0, \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 3.$

Ответ: $[2;3]$.

Решите уравнения и неравенства:

1. $|x^2-5x-6|+|2x^2-5x+3|=|3x^2-10x-3|.$ Ответ: $(-\infty;-1]\cup\left[1;\frac{3}{2}\right]\cup[6;+\infty).$
2. $|x^2-5x-6|+|2x^2-5x+3|=3x^2-10x-3.$ Ответ: $(-\infty;-1]\cup[6;+\infty).$
3. $2|5x^2-3x-8|+3|x^2-3x-10|=6|x^2-x-3|.$ Ответ: $x\in\varnothing.$
4. $|3x^2-x-4|+|x^2-8x-15|=|2x^2+7x+11|.$ Ответ: $\left[4-\sqrt{31};-1\right]\cup\left[\frac{4}{3};4+\sqrt{31}\right].$
5. $|3x^2-x-4|+|x^2-8x-15|=2x^2+7x+11.$ Ответ: $\left[4-\sqrt{31};-1\right]\cup\left[\frac{4}{3};4+\sqrt{31}\right].$
6. $|2x^2-3x-5|-|x^2-x|=3x^2-4x-5.$ Ответ: $[-1;0]\cup\left[1;\frac{5}{2}\right].$
7. $|x^2-4x|+|5x-x^2|=x.$ Ответ: $\{0\}\cup[4;5].$
8. $|x^2-4x+3|+|-x^2+5x-4|=x-1.$ Ответ: $\{1\}\cup[3;4].$
9. $\left|\frac{x}{x+1}-3x\right|+\left|\frac{x}{x+1}+2\right|=3x+2.$ Ответ: $\left\{-\frac{2}{3}\right\}\cup[0;+\infty).$
10. $|x^2-10x+24|+|x^2-9x+20|=-x+4.$ Ответ: 6.
11. $\left|\frac{x^3}{3}+70\right|+|x^2-2x-9|\le\frac{|x^3+3x^2-6x+183|}{3}.$ Ответ: $[-\sqrt[3]{210};1-\sqrt{10}]\cup[1+\sqrt{10};+\infty).$
12. $|x-1|+|x+1|+\cdots+|x-10|+|x+10|=20x.$ Ответ: $x\ge 10.$
13. $|x|+|x^2-1|=|x^2+x-1|.$ Ответ: $[-1;0]\cup[1;+\infty).$
14. $|2x^2+4x+2|-|x^2+5x+4|+|x+2-x^2|\le 0.$ Ответ: $[-1;2].$

<u>**Способ 8. Способ одновременного раскрытия модулей.**</u>

Опорная информация:

При этом способе решения опорная информация совпадает с опорной информацией способом последовательного раскрытия модуля, а отличие в решении состоит в том, что неравенства для подмодульных выражений объявляется одновременно для всех модулей.

Пример. Решите уравнение $\big||x-3|-x+1\big|+x=6.$

Решение: $\big||x-3|-x+1\big|+x=6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3<0,\\ |x-3|-x+1<0,\\ -(-(x-3)-x+1)+x=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0,\\ |x-3|-x+1\ge 0,\\ (-(x-3)-x+1)+x=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\ge 0,\\ |x-3|-x+1<0,\\ -((x-3)-x+1)+x=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\ge 0,\\ |x-3|-x+1\ge 0,\\ (-(x-3)-x+1)+x=6,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<3,\\ -(x-3)-x+1<0,\\ x=\dfrac{10}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ -(x-3)-x+1\ge 0,\\ x=-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ (x-3)-x+1<0,\\ x=4,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ (x-3)-x+1\ge 0,\\ x=8,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<3,\\ x>2,\\ x=\dfrac{10}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ x\le 2,\\ x=-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ 0x<2,\\ x=4,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ 0x\ge 2,\\ x=8,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Ответ: -2; 4.

Решите уравнения и неравенства:

1. $|x-1|+|x-3|=2x-4.$ Ответ: $x\ge 3.$
2. $x|2x+5|+2x|x-3|=22.$ Ответ: 2.
3. $||3-x|-x+1|+x=6.$ Ответ: -2; 4.
4. $|x^2-3|x|+1|=1.$ Ответ: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3.
5. $x^2+1+|x-1|=2|x|.$ Ответ: 1.
6. $|x|+|x+2|=2.$ Ответ: $-2\le x\le 0.$
7. $|x-1|\le|2x-3|-|x-2|.$ Ответ: $(-\infty;1]\cup[2;+\infty).$
8. $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\le 0.$ Ответ: $x<\dfrac{1}{3}.$
9. $|2x+8|\ge 8-|1-x|.$ Ответ: $(-\infty;-5]\cup[-1;+\infty).$
10. $\dfrac{6}{|x-1|-3}\ge|x+1|.$ Ответ: $[-4;-2]\cup[4;5].$
11. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}>2.$ Ответ: $x\in\varnothing.$

Способ 9. Способ перебора.

Опорная информация:

$$|a|=a \text{ или } |a|=-a.$$

Пример. Решите уравнение $|x-1|\cdot|x+1|+|x-2|\cdot|x-3|-5x+7=0.$

Решение: Преобразуем данное уравнение, используя свойство модуля $|a|\cdot|b|=|ab|$:

$|(x-1)(x+1)|+|(x-2)(x-3)|-5x+7=0.$

Случай 1. (+;+): $(x-1)(x+1)+(x-2)(x-3)-5x+7=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=3.\end{array}\right.$

Проверка: $x = 2$: $|2-1|\cdot|2+1|+|2-2|\cdot|2-3|-5\cdot 2+7=0,$

0 = 0 – верное равенство, значит, x = 2 –корень уравнения.

$x = 3$: $|3-1|\cdot|3+1|+|3-2|\cdot|3-3|-5\cdot 3+7=0,$

$0 = 0$ – верное равенство, значит, $x = 3$ –корень уравнения.

Случай 2. (+;-): $(x-1)(x+1)+(-(x-2)(x-3))-5x+7=0,\ 0x=0,\ x\in R.$

$$\begin{cases}(x-1)(x+1)\ge 0,\\ (x-2)(x-3)\le 0,\end{cases}\Leftrightarrow x\in[2;3].$$

Случай 3. (-;+): $-(x-1)(x+1)+(x-2)(x-3)-5x+7=0 \Leftrightarrow x=1{,}4.$

Проверка: $x=1{,}4: |1{,}4-1|\cdot|1{,}4+1|+|1{,}4-2|\cdot|1{,}4-3|-5\cdot 1{,}4+7=0,$

$1{,}92 = 0$ - неверное равенство, значит, $x = 1{,}4$ –не является корнем уравнения.

Случай 4. (-;-): $-(x-1)(x+1)+(-(x-2)(x-3))-5x+7=0 \ \Leftrightarrow\ x^2-1=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1.\end{array}\right.$

Проверка: $x = 1$: $|1-1|\cdot|1+1|+|1-2|\cdot|1-3|-5\cdot 1+7=0,$

$4 = 0$ – неверное равенство, значит, $x = 1$ – не является корнем уравнения.

$x = -1$: $|-1-1|\cdot|-1+1|+|-1-2|\cdot|-1-3|-5\cdot(-1)+7=0,$

$24 = 0$ – неверное равенство, значит, $x = -1$ – не является корнем уравнения.

Ответ: $[2;3]$.

Решите уравнения:

1. $|5-3x|=2x+1.$ Ответ: $4/5;6.$
2. $1+x+|x^2-x-3|=0.$ Ответ: $-\sqrt{2}.$
3. $3\sqrt{x+1}+|x-5|=6.$ Ответ: -1.
4. $|x-1|+|x-3|=2x-4.$ Ответ: $x\ge 3.$
5. $x|2x+5|+2x|x-3|=22.$ Ответ: 2.
6. $||3-x|-x+1|+x=6.$ Ответ: -2; 4.
7. $|x^2-3|x|+1|=1.$ Ответ: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3.
8. $x^2+1+|x-1|=2|x|.$ Ответ: 1.

__**Способ 10. Графический.**__

Пример 1. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x+1|=a+1.$

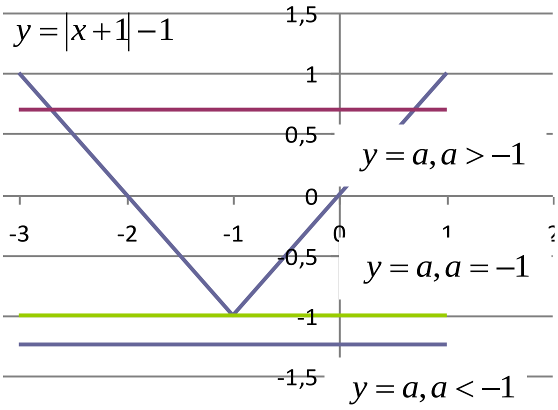
Решение: Перепишем уравнение в виде $|x+1|-1=a.$

1. Введём две функции: y = $|x+1|-1;\ y=a.$

2. Построим в одной системе координат графики функций $y=|x+1|-1,\ y=a.$

На основании рисунка получаем
при a < -1 уравнение не имеет корней;
при a = - 1 уравнение имеет одно решение;
при a > -1 уравнение имеет два корня.

Ответ: при a < -1 уравнение не имеет корней;
при a = - 1 уравнение имеет одно решение;
при a > -1 уравнение имеет два корня.



Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x|-5+a|=6$ имеет ровно 3 корня.

Решение:

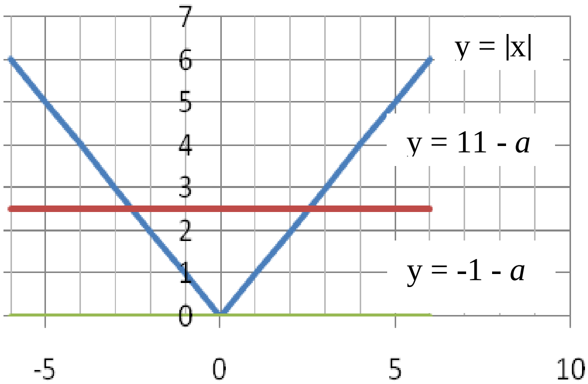
Уравнение $||x|-5+a|=6$ на основании определения модуля можно заменить равносильной ему совокупностью уравнений, т.е.

$$||x|-5+a|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|-5+a=6,\\ |x|-5+6=-6,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=11-a,\\ |x|=-1-a.\end{array}\right.$$

Уравнение имеет ровно 3 корня тогда и только тогда, когда выполняется условие $|x|=-1-a=0,$ т.е. a = -1.

Задачу можно решить графически.

Построим графики: $y=|x|,\quad y=11-a,$ $y=-1-a.$



Уравнение имеет ровно 3 корня тогда и только тогда, когда прямая $y=11-a$ пересекает график $y=|x|$ в двух точках, а прямая $y=-1-a$ в одной точке. (Т.к. $11-a>-1-a$ при любом а.)

Ответ: a = -1.

Решите уравнения и неравенства:

1. $\|x-1\|+\|x-2\|=1.$	Ответ: $[1;2]$.
2. $\|x\|+\|x-1\|+\|x-2\|=6.$	Ответ: -1; 3.
3. $\|x+4\|-\|x-3\|=1.$	Ответ: 0.
4. $\|x+2\|-\|x-3\|<7.$	Ответ: $(-3;4)$.
5. $\|x+2\|-\|x-3\|\geq 3.$	Ответ: $[2;+\infty)$.
6. $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}=4.$	Ответ: $x\in\varnothing.$
7. $\sqrt{x^2+10x+25}+\sqrt{x^2-10x+25}=10.$	Ответ: $[-5;5]$.
8. $\|x-8\|\leq 2.$	Ответ: $[6;10]$.
9. $\|x-1\|=3.$	Ответ: -2; 4.
10. $-\|3-x\|+\|2-x\|=3.$	Ответ: $x\in\varnothing.$
11. $\|5-x\|-\|2-x\|=3.$	Ответ: $x\leq 2.$
12. $\|x-5\|+\|5-x\|=0.$	Ответ: 5.
13. . $\|x-1\|-\|x-3\|=2.$	Ответ: $x\geq 3.$

14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x|-5+a|=6$ имеет ровно 3 корня.

Ответ: -1.

15. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение:

1. $|x+2|=a-3.$
2. $|||x|-1|-2|-a=1.$
3. $||x-3|-4|=a.$
4. $||x|-3|=a.$

5. $|x+2| = a + |x-2|$. 6. $|x^2 - 2| = a$.

7. $|(x-2)^2 - 1| - a = 0$.

16. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $2|x+3| - 2|x-2| + |x-4| = x + 2a$ имеет ровно два корня.

Ответ: $(0;3) \cup \{5.\}$

17. При каких значениях параметра a уравнение $|x-1| + |x-a| = 3$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: $a \in [-2;4]$.

<u>Способ 11. Метод введения новой переменной.</u>

Пример. Решите уравнение $x^2 + 2|x| - 3 = 0$.

Решение: Так как $x^2 = |x|^2$, уравнение можно переписать в виде $|x|^2 + 2|x| - 3 = 0$.

Введем новую неизвестную $t = |x|$, получим уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$. Квадратное уравнение имеет два корня $t_1 = 1$, $t_2 = -3$. Значит, исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1; \quad |x| = -3 \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Объединяя множества решений этих уравнений, получим ответ.

Ответ: $x = \pm 1$.

Решите уравнения и неравенства:

1. $3x^2 - 5|x| - 2 = 0$. Ответ: $x = \pm 2$.
2. $(x-1)^2 + |x-1| - 2 = 0$. Ответ: 0; 2.
3. $|x+2| \ge 3 + \dfrac{1}{5 - |x+2|}$. Ответ: $x < -7; x > 3; x = 2; x = -6$.
4. $\dfrac{|x-1|}{1 - \dfrac{6}{|x-1|}} < -1$. Ответ: $(-5;-1) \cup (3;7)$.

<u>3. Уравнения, неравенства, системы, задачи с модулями в ЕГЭ</u>

Пример 1. (ЕГЭ – 2002). Решите уравнение $\sqrt{9 - 4x|x-4|} - 4x = 3$.

Решение:

$$\sqrt{9 - 4x|x-4|} - 4x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{9 - 4x|x-4|} = 4x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3 \ge 0, \\ 9 - 4x|x-4| = (4x+3)^2. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1. $$\begin{cases} 4x + 3 \ge 0, \\ x - 4 \ge 0, \\ 9 - 4x(x-4) = 16x^2 + 24x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4, \\ 20x^2 + 8x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4, \\ x(x + 0{,}4) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

2. $$\begin{cases} 4x + 3 \ge 0, \\ x - 4 \le 0, \\ 9 + 4x(x-4) = 16x^2 + 24x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3/4 \le x \le 4, \\ x(x + 10/3) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 2. (ЕГЭ – 2003). Решите уравнение $\cos^2(x \sin x) = 1 + |\log_5(x^2 - x + 1)|$.

Решение: Так как $\cos^2(x\sin x)\le 1$ и $1+\left|\log_5(x^2-x+1)\right|\ge 1,$ то исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\cos^2(x\sin x)=1,\\ 1+\left|\log_5(x^2-x+1)\right|=1.\end{cases}$$

Все решения второго уравнения системы есть $x_1=0$ и $x_1=1.$ Из этих чисел только число x_1 удовлетворяет первому уравнению системы . Следовательно, система, а значит, и равносильное ей уравнение имеют единственное решение x_1.

Ответ: 0.

Пример 3. (ЕГЭ – 2005. Демоверсия). Решите уравнение $|\sin x|=\sin x\cdot\cos x.$

Решение: Имеющийся в уравнении модуль раскроем по определению.
Рассмотрим два случая:

1. $\begin{cases}\sin x\ge 0,\\ \sin x=\sin x\cdot\cos x,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=1,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in\pi n, n\in Z.$

2. $\begin{cases}\sin x<0,\\ -\sin x=\sin x\cdot\cos x,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x<0,\\ \cos x=-1,\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in\varnothing.$

Ответ: $\pi n, n\in Z.$

Пример 4. (ЕГЭ – 2006). Решите уравнение

$$\sqrt{(\sin 3x-2)^2}-\sqrt{9\sin^2 3x-24\sin 3x+16}=-4.$$

Решение:

$\sqrt{(\sin 3x-2)^2}-\sqrt{9\sin^2 3x-24\sin 3x+16}=-4\ \Leftrightarrow\ \sqrt{(\sin 3x-2)^2}-\sqrt{(3\sin 3x-4)^2}=-4\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ |\sin 3x-2|-|3\sin 3x-4|=-4\ \Leftrightarrow\ (2-\sin 3x)-(4-3\sin 3x)=-4,$ т.к. $\sin 3x<2$ и
$3\sin 3x<4,\ \Leftrightarrow\ \sin 3x=-1\ \Leftrightarrow\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}n, n\in Z.$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}n, n\in Z.$

Пример5. (ЕГЭ – 2006). Найдите все значения *x*, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x)=\log_2(3x+13)$ и $g(x)=5{,}5$ меньше, чем 0,5.

Решение:

$$\left|\log_2(3x+13)-5{,}5\right|<0{,}5\Leftrightarrow\begin{cases}3x+13>0,\\ -0{,}5<\log_2(3x+13)-5{,}5<0{,}5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{13}{3},\\ 5<\log_2(3x+13)<6,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{13}{3},\\ 32<3x+13<64,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{13}{3},\\ 32<3x+13<64,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{13}{3},\\ 6\dfrac{1}{3}<x<17,\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in\left(6\dfrac{1}{3};17\right).$$

Ответ: $\left(6\dfrac{1}{3};17\right).$

Пример 6. (ЕГЭ – 2006). Решите неравенство $\dfrac{(21x-2x^2+65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9|-2}\ge 0.$

Решение:

Т.к. $(\log_3 u - \log_3 v) \sim (u - v)$ при $u, v > 0$, $(|u| - |v|) \sim (u^2 - v^2)$ и $\sqrt{u} \sim u$ при $u \ge 0$, то имеем

$$\frac{(21x - 2x^2 + 65)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9| - 2} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\left(x - \frac{26}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)(x+2)}{|x-9|^2 - 9^2} \le 0, \\ x + 2 > 0, \\ |x - 9| > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-13)(x+2)}{x(x-18)} \le 0, \\ x \ge -2, \\ x \ne -9, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \; x \in [-2;0) \cup [13;18)$.

Ответ: $[-2;0) \cup [13;18)$.

Пример 7. (ЕГЭ – 2008). Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \left|\sqrt{1-x^2} - 2\right| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2.$$

Решение:

1. Функция f определена только при $-1 \le x \le 1$. При этих значениях x $\sqrt{1-x^2} \le 1$, и поэтому $\sqrt{1-x^2} - 2 < 0$.

Следовательно, $f(x) = \left|\sqrt{1-x^2} - 2\right| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2 = x^3 - 3x^2 + 2$.

2. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $-1 \le x \le 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1], \\ x = 2 \notin [-1;1]. \end{array}\right.$

Сравним числа $f(-1) = -2$, $f(0) = 2$ и $f(1) = 0$. Наибольшее из них 2.

Значит, $\max\limits_{-1 \le x \le 1} f(x) = 2$.

Ответ: 2.

Пример 8. (ЕГЭ – 2008). Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (2x+4)^5 - 4(2x+4)^4 \text{ при } |x+2| \le 1.$$

Решение:

1. $|x+2| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x + 2 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le x \le -1$.

2. $f'(x) = ((2x+4)^5 - 4(2x+4)^4)' = 5(2x+4)^4 \cdot 2 - 4 \cdot 4(2x+4)^3 \cdot 2 = 4(2x+4)^3(5x+2)$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(2x+4)^3(5x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \in [-3;-1], \\ x = -2/5 \notin [-3;-1]. \end{array}\right.$

3. $x = 2$ – единственная критическая точка, точка максимума (т.к. в ней производная меняет знак с плюса на минус).

4. Сравним числа $f(-1) = (-2+4)^5 - 4(-2+4)^4 = -32$,

$f(-3) = (-6+4)^5 - 4(-6+4)^4 = -96$. Наименьшее из них -96.

Ответ: -96.

Пример 9. (ЕГЭ – 2010). Решите неравенство

$$\log_5\left(\left(7^{-x^2} - 5\right)\left(7^{-x^2+16} - 1\right)\right) + \log_5 \frac{7^{-x^2} - 5}{7^{-x^2+16} - 1} > \log_5\left(7^{2-x^2} - 1\right)^2.$$

Решение: Пусть $t = 7^{-x^2}$, $0 < t \le 1$, тогда неравенство примет вид: $\log_5\left((t-5)\left(7^{16}t-1\right)\right) + \log_5 \frac{t-5}{7^{16}t-1} > \log_5 (49t-1)^2$.

$t-5<0$, поэтому $7^{16}t - 1 < 0$, то есть $0 < t < \frac{1}{7^{16}}$.

Получаем: $\begin{cases} \log_5 (t-5)^2 > \log_5 (49t-1)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-5| > |49t-1|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-t > 1-49t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ 0 < t < \frac{1}{7^{16}}$.

Тогда $7^{-x^2} < 7^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x < -4. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$.

Пример 10. (ЕГЭ-2011). Решите неравенство $3\log_{11}\left(x^2+8x-9\right) \le 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+8x-9 > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-1) > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x-9} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty)$.

$3\log_{11}\left(x^2+8x-9\right) \le 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ \log_{11}\left(x^2+8x-9\right)^3 - \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9} \le 4, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ \log_{11} \frac{(x+9)^3(x-1)^3(x+9)}{(x-1)^3} \le 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ \log_{11}(x+9)^4 \le 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ 4\log_{11}|x+9| - 4 \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ \log_{11}|x+9| - \log_{11} 11 \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ (11-1)(|x+9|-11) \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ \left((x+9)^2 - 11^2\right) \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ ((x+9)-11)((x+9)+11) \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-9) \cup (1;+\infty), \\ (x-2)(x+20) \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in [-20;-9) \cup (1;2]$.

Ответ: $[-20;-9) \cup (1;2]$.

Пример 11. (ЕГЭ – 2011). Решите неравенство $7\log_{12}\left(x^2-13x+42\right) \le 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6}$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-13x+42 > 0, \\ \frac{(x-7)^7}{x-6} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x-7) > 0, \\ \frac{(x-7)^7}{x-6} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;6) \cup (7;+\infty)$.

$7\log_{12}\left(x^2-13x+42\right) \le 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;6) \cup (7;+\infty), \\ 7\log_{12}((x-6)(x-7)) \le 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6}, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;6)\cup(7;+\infty), \\ 7\log_{12}|x-6| + 7\log_{12}|x-7| \le 8 + 7\log_{12}|x-7| - \log_{12}|x-6|, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;6)\cup(7;+\infty), \\ 8\log_{12}|x-6| \le 8, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;6)\cup(7;+\infty), \\ \log_{12}|x-6| \le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;6)\cup(7;+\infty), \\ |x-6| \le 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;6)\cup(7;+\infty), \\ -12 \le x-6 \le 12, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;6)\cup(7;+\infty), \\ -12 \le x-6 \le 12, \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in [-6;6)\cup(7;18].$$

Ответ: $[-6;6)\cup(7;18]$.

Пример 12. (ЕГЭ-2011). Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|} + 6|x| + 7 = 5y + 6x^2 + 4a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Если $(x_\circ; y_\circ)$ решение, то $(-x_\circ; y_\circ)$ – также решение. Значит, если система имеет единственное решение, то это решение вида $(0; y)$. При подстановке его в исходную систему получаем:

$$\begin{cases} 4a = 12 - 5y, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Поэтому либо $y = -1$, либо $y = 1$.

При $y = -1$ получаем: $a = \dfrac{17}{4}$. При этом значении параметра система принимает вид:

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|} + 6|x| = 5y + 6x^2 + 10, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Помимо решения $(0;-1)$ система имеет решения $(1;0)$ и $(-1;0)$, что не удовлетворяют условию.

При $y = 1$ получаем: $a = \dfrac{7}{4}$. При этом значении параметра система принимает вид:

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|} + 6|x| = 5y + 6x^2, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\cdot\left(2^{|x|} - y\right) + 6\left(|x| - x^2\right) = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. Поэтому $2^{|x|} - y \ge 0$ и $|x| - x^2 \ge 0$.

Значит, $\begin{cases} 2^{|x|} = y, \\ |x| = x^2. \end{cases}$

Откуда, учитывая условие $|y| \le 1$, получаем: $x = 0$, $y = 1$ - единственное решение.

Ответ: $a = \dfrac{7}{4}$.

Пример 13. (ЕГЭ – 2012). Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+5}(6-x)\cdot\log_{4-x}(x+3) \ge 0, \\ |2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \le 2. \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим второе неравенство. Оно имеет смысл при $2x - 6 \ne 0$, т.е. при $x \ne 3$.

Пусть $\left|2x-6\right|^{x+1}=t$. Тогда неравенство примет вид $t+\frac{1}{t}\le 2$. Откуда $t=1$ или $t<0$. При всех допустимых x основание степени положительно и, следовательно, $t>0$. Значит, неравенство выполняется только при $t=1$. Выясним, при каких x это происходит:

$$\left|2x-6\right|^{x+1}=1; \left[\begin{array}{l} \left|2x-6\right|=1, \\ \begin{cases} x+1=0, \\ 2x-6\ne 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2{,}5, \\ x=3{,}5 \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Подставим в первое неравенство найденные значения x:

1. При $x=2{,}5$: $\log_{7,5}3{,}5\cdot\log_{1,5}5{,}5>0.$

2. При $x=3{,}5$: $\log_{8,5}2{,}5\cdot\log_{0,5}6{,}5<0.$

3. При $x=-1$: $\log_4 7\cdot\log_5 2>0.$

Неравенству удовлетворяет значения $x=-1$ и $x=2{,}5.$

Ответ: -1; $2{,}5$.

Решите уравнения, неравенства и системы:

1. $\sqrt{(\sin 0{,}5x-1)^2}+\sqrt{\sin^2 0{,}5x-4\sin 0{,}5x+4}=3-\sqrt{2}.$ Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

2. $\sqrt{(\sin 1{,}5x-2)^2}+\sqrt{\sin^2 1{,}5x-6\sin 1{,}5x+9}=4.$ Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n, n\in Z$

3. $\sqrt{(4\sin 2x-5)^2}+\sqrt{\sin^2 2x-2\sin 2x+1}=1.$ Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

4. $\sqrt{(4\cos 3x-5)^2}+\sqrt{\cos^2 3x-8\cos 3x+16}=4.$ Ответ: $\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi n, n\in Z$

5. $\sqrt{(3^x-4)^2}+\sqrt{(3^x-6)(3^x+9)}=3^x-4.$ Ответ: $\log_3 6.$

6. $\sqrt{(3-6^x)^2}+\sqrt{(6+6^x)(11-6^x)}=6^x-3.$ Ответ: $\log_6 11.$

7. $\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{26+3x-5x^2}=x-1.$ Ответ: 2,6.

8. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2-17x+15}=2-x.$ Ответ: 1,25.

9. $\log_{|0,25+1|}(0{,}15x+1{,}4)\ge 1.$ Ответ: $(-8;-6]\cup(0;4].$

10. $\frac{(25x-3x^2+18)\sqrt{x-1}}{\log_4|x-7|-1}\ge 0.$ Ответ: $[1;3)\cup[9;10).$

11. $\frac{1-\log_4|x-4|}{(114-x-3x^2)\sqrt{x+3}}\le 0.$ Ответ: $(-3;-1]\cup(6;9].$

12. $\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2\le\frac{|x^2+6x|}{(x^2-5x+4)^2}.$ Ответ: $x\in(-\infty;-3-3\sqrt{2}]\cup\{-3\}\cup$
$\cup[-3+3\sqrt{2};4)\cup(4;+\infty).$

13. $\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2\le\frac{|x^2-10x|}{(x^2+7x+6)^2}.$ Ответ: $x\in(-\infty;-6)\cup(-6;5-5\sqrt{2};]\cup$
$\cup\{5\}\cup[5+5\sqrt{2};+\infty).$

14. $3\log_{x-2}(8-x)+1\ge\frac{1}{4}\log^2_{x-2}(16-10x+x^2)^2.$ Ответ: $[5;7].$

15. $7\log_8(x^2+3x+2)\le 8+\log_8\frac{(x+1)^7}{x+2}.$ Ответ: $[-10;-2)\cup(-1;6].$

16. $7\log_{12}\left(x^2-13x+42\right)\le 8+\log_{12}\dfrac{(x-7)^7}{x-6}$. Ответ: $[-6;6)\cup(7;18]$.

17. $11\lg\left(x^2+11x+30\right)\le 12+\lg\dfrac{(x+6)^{11}}{x+5}$. Ответ: $[-15;-6)\cup(-5;5]$.

18. $\log^2_{x+2}(x-18)^2+32\le 16\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)$. Ответ: 2.

19. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right)\ge 1$. Ответ: $\left[-\sqrt{8};-1\right)\cup\left[\dfrac{-2+\sqrt{44}}{5};+\infty\right)$.

20. $\dfrac{2\log_5\left(x^2-5x\right)}{\log_5 x^2}\le 1$. Ответ: $(-1;0)\cup(5;6]$.

21. $\dfrac{2\log_3\left(x^2-4x\right)}{\log_3 x^2}\le 1$. Ответ: $(-1;0)\cup(4;5]$.

22. $\log_5\left(\left(3^{-x^2}-5\right)\left(3^{-x^2+4}-1\right)\right)+\log_5\dfrac{3^{-x^2}-5}{3^{-x^2+4}-1}>\log_5\left(3^{2-x^2}-2\right)^2$. Ответ: $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

23. $\log_2\left(\left(7^{-x^2}-6\right)\left(7^{-x^2+9}-1\right)\right)+\log_2\dfrac{7^{-x^2}-6}{7^{-x^2+9}-1}>\log_2\left(7^{3-x^2}-5\right)^2$. Ответ: $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

24. $\dfrac{\left(x^2+x\right)\lg\left(x^2+2x-2\right)}{|x-1|}\ge\dfrac{\lg\left(-x^2-2x+2\right)^2}{x-1}$. Ответ: $(-\infty;-3]\cup(1;+\infty)$.

25. $\dfrac{\left(x^2+x\right)\log_8\left(x^2+4x-4\right)}{|x-2|}\ge\dfrac{\log_8\left(-x^2-4x+4\right)^6}{x-2}$. Ответ: $(-\infty;-5]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$.

26. $\begin{cases}\log_6(-x-2y+3)+\log_6(-4x+1)=1,\\ |-x-2y+3|+|-1+4x|=4-3(y+x).\end{cases}$ Ответ: $(-0{,}15;-0{,}3)$.

27. $\begin{cases}\log_3(5-2x+4y)+\log_3(7-4x)=2,\\ |4x-7|+|5-2x+4y|=10-4x+5y.\end{cases}$ Ответ: $(1;0)$.

28. $\begin{cases}\log_6(7+x-y)+\log_6(2x+3)=1,\\ |7+x-y|-|-3-2x|=-5x+y.\end{cases}$ Ответ: $(-1;0)$, $(4{,}5;11)$.

29. $\begin{cases}\dfrac{2x^2-6x+5}{2x-3}\le 1,\\ 25x^2-4|8-5x|<80x-64.\end{cases}$ Ответ: $(0{,}8;1{,}5)\cup\{2\}$.

30. $\begin{cases}\dfrac{2x^2-2x+1}{2x-1}\le 1,\\ 25x^2-3|3-5x|<30x-9.\end{cases}$ Ответ: $(0;0{,}5)\cup\{1\}$.

31. $\begin{cases}\log_{3-x}(x+1)\cdot\log_{x+5}(4-x)\ge 0,\\ \left|\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}\right|^{x-1{,}2}+\left|\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}\right|^{1{,}2-x}\le 2.\end{cases}$ Ответ: 1,2.

32. $\begin{cases}2^x+2^{|x|}\ge 2\sqrt{2},\\ \log_{0{,}5}(6|x|-3)\le\log_{0{,}5}\left(4-x^2\right).\end{cases}$ Ответ: $\left(-2;\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\cup[1;2)$.

33. $\begin{cases} \dfrac{2^{x+1}-22}{2^x-2} \ge 1, \\ \log_5^2 x + |\log_5 x| \ge 6. \end{cases}$ Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{25}\right] \cup [25;+\infty)$.

34. $\begin{cases} \log_2(100-x^2) \le 2 + \log_2(x+1), \\ \log_{0,3}(2|x+5| + |x-11| - 30) < 1. \end{cases}$ Ответ: $(9,3;10)$.

35. $\begin{cases} \log_4(81-x^2) \le 2 + \log_4(x+4), \\ \log_{0,2}(3|x+4| + |x-10| - 38) < 1. \end{cases}$ Ответ: $(8,1;9)$.

36. $\begin{cases} 25^x + 3\cdot 10^x - 4\cdot 4^x > 0, \\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}\left(x^2 - 12|x| + 37\right) - \log_{1+\frac{x^2}{37}}\left(x^2 - 12|x| + 37\right) \ge 0. \end{cases}$ Ответ: 6.

37. $\begin{cases} 8\cdot 4^x - 65\cdot 2^x + 8 \le 0, \\ \log_{|x|}^2\left(x^4\right) + \log_3\left(x^2\right) \le 18. \end{cases}$ Ответ: $[-3;-1) \cup (-1;0) \cup$
$\cup (0;1) \cup (1;3]$.

38. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ \left|\sqrt{2}x - 1\right| = \sqrt{2}x - 1. \end{cases}$ Ответ: $x > 7/9$.

39. $\begin{cases} \left(9\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 1\right)\cdot \log_{x+1}|x-3,5| \ge 0, \\ 9^{x+1} + \log_{x+1}|x-3,5| + 1 \ge 10\cdot 3^x. \end{cases}$ Ответ: $(0;2,5] \cup [4,5;+\infty)$.

40. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|+2} + 3|x| + 5 = 4y + 3x^2 + 2a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = \dfrac{5}{2}$.

41. Найдите все значения *x*, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = \log_4(3x-14)$ и $g(x) = 2,5$ меньше, чем 0,5.

Ответ: $(10;26)$.

42. Найдите все значения *x*, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = 0,2\cdot 2^{3x+5}$ и $g(x) = 4,8$ меньше, чем 1,6.

Ответ: $(6;19/3)$.

43. Найдите все значения *x*, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-2}$ и $g(x) = 1$ меньше, чем 0,5.

Ответ: $(2;+\infty)$.

44. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 3(2x-4)^4 - (2x-4)^5 \text{ при } |x-2| \le 1.$$

Ответ: 80.

45. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 50(0,5x-1)^2 - (0,5x-1)^4 \text{ при } |x-3| \le 3.$$

Ответ: 184.

46. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x(2x-3)^6$ при $|x-1,5| \le 0,5$.

Ответ: 2.

47. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=x(0{,}5x+4)^6$ при $|x+8|\le 2$.

Ответ: -10.

48. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{-5x}{x^2+4}$ при $|x+3{,}5|\le 2{,}5$.

Ответ: 0,75.

49. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+16}$ при $|x+5{,}5|\le 2{,}5$.

Ответ: -0,8

50. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=0{,}25(x-3)(x-3)(x^2+9)-2x^2 \text{ при } |x-1{,}5|\le 1{,}5.$$

Ответ: -18.

51. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-5;-1)$ значение выражения x^2-3 не равно значению выражения $(a+4)|x|$.

Ответ: $(-\infty;-6]\cup(0{,}4;+\infty)$.

52. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-5;-2]$ значение выражения $x^2-4|x|$ не равно значению выражения $a|x|+4$.

Ответ: $(-\infty;-4)\cup[0{,}2;+\infty)$.

<u>4. Тригонометрические уравнения с модулями</u>

Решите уравнения и неравенства:

1. $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|$. Ответ: $2\pi m, m\in Z; \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

2. $\dfrac{\cos x}{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2}=|\cos x|$. Ответ: $-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

3. $\dfrac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0$. Ответ: $5; \pi n, n\in Z.$

4. $(x-2)^2|\cos x|=\cos x$. Ответ: $1; \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

5. $|tgx|=tgx-\dfrac{1}{\cos x}$. Ответ: $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in Z.$

6. $|\cos x|=\cos x-2\sin x$. Ответ: $\dfrac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

7. $1+2\sin x\cdot|\cos x|=0$. Ответ: $\dfrac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z;\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi m, m\in Z.$

8. $\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=\sin x-\dfrac{1}{2}$. Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z;\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi m, m\in Z.$

9. $4x\sin 3x=3x+|x|$. Ответ: $0; \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}, n\in Z, n\ge 0;$ $(-1)^m\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi m}{3}, m\in Z, m<0.$

10. $2\sin^2 x-\dfrac{|\sin x|}{\cos x}=0$. Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z;\ \pi m, m\in Z.$

11. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x.$ Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z.$

12. $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x.$ Ответ: $\pm \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi n, n \in Z.$

13. $|\sin x| \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin x.$ Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;\ -\frac{2}{3}\pi + 2\pi m, m \in Z;$ $\pi k, k \in Z.$

14. $|\cos x| \cdot tgx = 14\cos x.$ Ответ: $\pm arctg 14 + 2\pi n, n \in Z.$

15. $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2 - 2\cos^2 x}.$ Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

16. $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \left(\cos x - \frac{2}{3}\right).$ Ответ: $\arccos\frac{1}{3} - \pi + 2\pi n, n \in Z;\ \pi m, m \in Z.$

17. $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$ Ответ: $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi m, m \in Z.$

18. $|x-2|\sin x = \frac{1}{2}x|\sin x|.$ Ответ: $\frac{4}{3}; \pi n, n \in Z.$

19. $|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1.$ Ответ: $\pm \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

20. $5\sin^2 x + 8\cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x.$ Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

21. $\frac{|\cos x|}{\cos^2 x} + \frac{1}{1-\sin^2 x} = 2tg^2 x.$ Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

22. $|\cos x| = \cos x \cdot (x-5)^2.$ Ответ: $6; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

23. $\cos x = |\cos x| \cdot (|x^2 + x| - 1).$ Ответ: $1; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

24. $2\pi \cos x = |x| - |x-\pi|.$ Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + (n+1)\pi, n = -1; -2; \cdots;$ $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n = 1; 2; \cdots;\ \frac{\pi}{2}.$

25. $\frac{\pi}{\sqrt{3}} tgx = |x| - |x-\pi|..$ Ответ: $-\frac{\pi}{3} - \pi n;\ \frac{\pi}{3} + \pi n, n \ge 1, n \in Z.$

26. $\frac{\cos x}{|\cos x|} = \sin x + \cos x.$ Ответ: $\pi n, n \in Z.$

27. $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1.$ Ответ: $k\pi; (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, k, m \in Z.$

28. $|1 + \cos(\pi\sqrt{x})| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45.$ Ответ: 9.

29. $\frac{9 - |3x+6|}{\sin x - 8} \le 0.$ Ответ: $[-5; 1].$

5. Логарифмические уравнения и неравенства с модулями

Решите уравнения и неравенства:

1. $\log_{|x|-2}|x-3| \le 0.$ Ответ: $(-3; -2) \cup (3; 4].$

2. $\log_{1+|7x+17|}\left(|3x+8|+|7x+17|\right)\le 1.$ Ответ: $\left[-3;-\frac{17}{7}\right)\cup\left(-\frac{17}{7};-\frac{7}{3}\right].$

3. $\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5|>0.$ Ответ: $\left(1;\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right).$

4. $\frac{1}{|\log_2 2x|-2}\le\frac{1}{|\log_4 x^2|-1}.$ Ответ: $1/8<x<1/2, x\ge 1, x\ne 2.$

5. $\frac{1}{|\log_2(x/2)|-3}\le\frac{1}{|\log_8 x^3|-2}.$ Ответ: $0<x<1/4, 1/4<x\le 1, 4<x<16.$

6. $\frac{1}{2}\cdot\log_{(x-1)}\left(x^2-8x+16\right)+\log_{(4-x)}\left(-x^2+5x-4\right)>3.$ Ответ: $\left(2;\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};3\right).$

7. $\log_2\left(\frac{x^2+|x-3|+3}{x+1}\right)^2-|\log_2 x-2|>\log_2 x+2.$ Ответ: $\left(0;\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right).$

8. $\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}\left(x^2-4x+4\right)\right|\ge 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}\left(x^2-4x+4\right)\right|.$ Ответ: $\{3\}\cup[8;+\infty).$

9. $\frac{\log_2\left(x^2-2x-7\right)^5-\log_3\left(x^2-2x-7\right)^8}{3x^2-13x+4}\le 0.$ Ответ: $(-\infty;-2]\cup\left(1+\sqrt{8};4\right)\cup(4;+\infty).$

10. $\log_{\frac{1}{2}}\log_8\frac{x^2-2|x|}{|x|-3}\ge 0.$ Ответ: $[-6;-4]\cup[4;6].$

11. $\log_5\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-4|x|}{|x|-7}\le 0.$ Ответ: $[-7/2;-1]\cup[1;7/2].$

12. $\log_{x-3}(5-x)\le\log_{x-3}|4x-14|.$ Ответ: $\left(3;\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};\frac{19}{5}\right]\cup(4;5).$

14. $\log_{(x+1)^2}8+3\log_4(x+1)\ge 9\frac{1}{4}.$ Ответ: $0<x<\sqrt[6]{2}-1, x>63.$

15. $\log_{|2x+1|}x^2\ge 2.$ Ответ: $x\in\left[\frac{1}{3};0\right).$

16. $\log_{2x}\left|x^2-5x+6\right|<1.$ Ответ: $(0;0{,}5)\cup(1;2)\cup(3;6).$

17. $\log_{x^2}\frac{2x}{|x-3|}\le\frac{1}{2}.$ Ответ: $[5;+\infty).$

18. $\left|\log_{3x}\left(x^2-6x+8\right)-1\right|=1-\log_{3x}\left(x^2-6x+8\right).$ Ответ: $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup[1;2)\cup(4;8].$

19. $1+\log_9(x+1)^2=\log_3(3x+9).$ Ответ: -2.

20. $2-\log_2 x=\log_2\left(\frac{3}{4}|x|+2\right).$ Ответ: $\frac{4}{3}$..

21. $\lg^2(x-2)^2=3^{\left(2\log_3\sqrt{2}\right)}\left(\frac{\log_5(2-x)}{\log_5 10}\right).$ Ответ: $1; 2-\sqrt{10}.$

22. $\frac{1}{4}\log_{x-1}(x-5)^4-8+4\log_{5-x}\left(6x-x^2-5\right)=0.$ Ответ: $\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$

23. $\left(3-2^x\right)\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{2x+1}{4x+7}=\left|2^x-3\right|.$ Ответ: $\log_2 3.$

24. $\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}(x-1)=2.$ Ответ: 1,25.

25. $\log_{\left|\cos\frac{\pi x}{8}\right|}\left(9^x-3^{x+2}+12\right)=\log_{\left|\cos\frac{\pi x}{8}\right|}\left(3^x+3\right).$ Ответ: 2.

26. $\left|\log_2(3x-1)-\log_2 3\right|=\left|\log_2(5-2x)-1\right|.$ Ответ: $1;\frac{11}{6};\frac{17}{12}.$

27. $\sqrt{\left|1-3\log_2 x\right|}=1-3\left|\log_2 x\right|.$ Ответ: $1;\sqrt[3]{2}.$

28. $\sqrt{\left|1-3\log_2 x\right|}=\left|1+\log_2 x\right|.$ Ответ: $1;\frac{1}{32}.$

29. $\left|\log_4 x-1\right|=(2x=5)(\log_4 x-1).$ Ответ: 4.

30. $2\log_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}x^2+\log_{|x|}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\le 4.$ Ответ: $-\frac{1}{2}.$

31. $\left|\log_2(2x+7)\right|=\log_2\left(1+|x+3|\right)+\log_2\left(1-|x+3|\right).$ Ответ: -3.

32. $\left|\log_{2x}\frac{x^2-5x+6}{2x}\right|=1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right).$ Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup[1;2)\cup(3;6].$

33. $\left|\frac{\log_2 x}{1-\log_2 x}\right|+\left|\log_2 x\right|=\frac{\log_2^2 x}{\left|\log_2 x-1\right|}.$ Ответ: $\{1\}\cup(2;+\infty).$

34. $\log_{|2x+1|}|x-3|\le 0.$ Ответ: $(-3;-2)\cup(3;4).$

35. $\log_{|2x+1|}x^2\ge 2.$ Ответ: $\left[-\frac{1}{3};0\right).$

36. $\left|1-\log_{\frac{1}{6}}x\right|+2=\left|3-\log_{\frac{1}{6}}x\right|.$ Ответ: $x\ge\frac{1}{6}.$

37. $\log_2\frac{3x-8}{|x-2|}>1.$ Ответ: $(4;+\infty).$

38. $\log_4\frac{4x-5}{|x-1|}\ge 1.$ Ответ: $\left[\frac{3}{2};+\infty\right).$

39. $\log_2\left(x^2-6x+9\right)<2(x-1)\log_{\frac{1}{2}}(3-x)+4x.$ Ответ: $(-\infty;-13)\cup(0;3).$

40. $\log_{x^2}\frac{2x}{|x-3|}\le\frac{1}{2}.$ Ответ: $[5;+\infty).$

41. $\left(5x-2x^2\right)\log_{\frac{1}{5}}\left(|x|-2\right)>0.$ Ответ: $(-3;-2)\cup\left(\frac{5}{2};3\right).$

6. Показательные уравнения и неравенства с модулями

Решите уравнения и неравенства:

1. $5^{|4x-6|}=25^{3x-4}.$ Ответ: $\frac{7}{5}.$
2. $|x-5|^{3x^2-15x}=1.$ Ответ: 0;4;6.

3. $2^{2x+1}-15\cdot 2^x+10=6\cdot\left|2^{x-1}-1\right|.$ Ответ: $3;\log_2\left(3-\sqrt{7}\right).$

4. $5^x+\left|x-4\right|-5>5^{\log_5\left|x-4\right|}.$ Ответ: $\left(1;4\right)\cup\left(4;+\infty\right).$

5. $\dfrac{21-2^x-2^{6-x}-\left|3-2^x\right|}{5-\left|2^x-3\right|}\ge 1.$ Ответ: $x>3.$

6. $\left|2^{4x^2-1}-5\right|\le 3.$ Ответ: $\left[-1;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right].$

7. $1<3^{\left|x^2-x\right|}<9.$ Ответ: $\left(-1;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1;2\right).$

8. $\left|x-1\right|^{x^2+x-2}>1.$ Ответ: $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(2;+\infty\right).$

9. $\left|3^x-4\right|\cdot\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x+12}{2x+5}=4-3^x.$ Ответ: $-4{,}75;\log_3 4;2.$

10. $9^{1-\left|x-2\right|}-36\cdot 3^{-\left|x-2\right|}+11=0.$ Ответ: $1;3.$

11. $\left|2^x-1\right|+\left|2^x-2\right|=1.$ Ответ: $\left[0;1\right].$

12. $2^{\left|x+2\right|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1.$ Ответ: $\{-3\}\cup\left[-1;+\infty\right).$

13. $\left|3^x-2\cdot 3^{-x}\right|^{\log_4(x+2)-\log_2 x}=1.$ Ответ: $\log_3 2;\ 2.$

14. $\left|x-2\right|^{3x^2-10x+3}=1.$ Ответ: $\dfrac{1}{3};1;3.$

15. $\left|x-1\right|^{x^2+x-2}=\left|x-1\right|^{3x+10}.$ Ответ: $0;2;1\pm\sqrt{13}.$

16. $\left|2^x-2\right|-\left|2^x-1\right|\ge\left|2^x+1\right|-4.$ Ответ: $x\le\log_2 3.$

17. $2^{\left|x-2\right|\sin x}=\left(\sqrt{2}\right)^{x\cdot\left|\sin x\right|}.$ Ответ: $\pi n, n\in Z;\dfrac{4}{3}.$

18. $2^{2x}-2^{x+2}+\left|2^x-\dfrac{1}{3}\right|=-\dfrac{7}{3}.$ Ответ: 0; 1.

7. Иррациональные уравнения и неравенства с модулями

Решите уравнения и неравенства:

1. $\dfrac{\left|x+2\right|-\left|x\right|}{\sqrt{4-x^3}}>0.$ Ответ: $\left(-1;\sqrt[3]{4}\right).$

2. $\sqrt{\left|1-8x\right|-2}\le x+1.$ Ответ: $\left[-5+\sqrt{23};-\dfrac{1}{8}\right]\cup\left[\dfrac{3}{8};3-\sqrt{5}\right]\cup\left[3+\sqrt{5};+\infty\right).$

3. $\sqrt{x^2+x+1}+2x\le\left|3x+1\right|.$ Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{3}{8}\right]\cup\left[0;+\infty\right).$

4. $\sqrt{\left|x+2\right|-2}>\sqrt{\left|x+2\right|-1997}.$ Ответ: $\left(-\infty;-1999\right]\cup\left[1995;+\infty\right).$

5. $\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=4.$ Ответ: 5.

6. $\left|\sqrt{x^2-x}-x\right|+\left|x+\sqrt{x}\right|=\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}.$ Ответ: 0.

7. $\left|3x+1\right|+\sqrt{3x+4}\le 3.$ Ответ: $\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}\cup\left[-1;0\right].$

8. $\sqrt{5-\left|x+1\right|}\le x-1.$ Ответ: $\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{4};4\right].$

9. $\left|\sqrt{x-4}-3\right|>\left|\sqrt{9-x}-2\right|+1.$ Ответ: $[4;6,5)$.

10. $\left|\sqrt{x-4}-2\right|>\dfrac{6}{\sqrt{x+4}-3}.$ Ответ: $[-4;5)\cup(21;+\infty)$.

11. $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}}\ge|x|-2.$ Ответ: $(-3;-2]\cup\left[\dfrac{3-\sqrt{31}}{2};\dfrac{\sqrt{23}-1}{2}\right]\cup[2;5)$.

12. $\dfrac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7}\ge 1.$ Ответ: $(-\infty;-11)\cup[\sqrt{5};3)$.

13. $\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x^2-7x+6|-|x^2-x-2|}\ge 0.$ Ответ: $-2\le x<2-\sqrt{2}, \dfrac{4}{3}<x\le 3;$

14. $\dfrac{1-\sqrt{1-8(\log_2 x)^2}}{2\log_2 x}<1.$ Ответ: $\left[2^{-\frac{1}{\sqrt{8}}};1\right)\cup\left(1;2^{\frac{1}{3}}\right)$.

15. $\dfrac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|}\le 1.$ Ответ: $-7\le x<-3/4, 1/2\le x<2.$

16. $\dfrac{\sqrt{x+8}-|2x+1|}{\sqrt{7-x}-|2x+1|}\ge 1.$ Ответ: $-8\le x<-2, -1/2\le x<3/4.$

17. $\sqrt{\dfrac{x^2+9x-162}{x-2}}>9-|x|.$ Ответ: $[-18;-3)\cup(0;2)\cup(9;+\infty)$.

18. $\sqrt{\dfrac{x^2+30x-675}{x-3}}>15-|x|.$ Ответ: $[-45;-5)\cup(0;3)\cup(15;+\infty)$.

19. $|x+1|\le\sqrt{(x+1)^2(x^2-25)}.$ Ответ: $(-\infty;-\sqrt{26}]\cup\{-1\}\cup[\sqrt{26};+\infty)$.

20. $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+2x+1}=3.$ Ответ: $x\le -1$.

21. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2.$ Ответ: $1\le x\le 2$.

22. $\sqrt{x-2+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$ Ответ: 15.

23. $3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x=\left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)^2.$ Ответ: 0.

24. $\sqrt{x^2-4x+4}+\left(\sqrt{3x^2-5x-1}\right)^2\ge 1.$ Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{37}}{6}\right]\cup[2;+\infty)$.

25. $\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{4x^2-x-2}\right)^2\ge 3.$ Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}\right]\cup[1;+\infty)$.

8. Уравнения и неравенства, включающие функции max и min

Пример. Решите уравнение $\max(2x;3-x)=\min(5+x;6x)$.

Решение: $\max(2x;3-x)=\dfrac{1}{2}(x+3+|3x-3|)$, а $\min(5+x;6x)=\dfrac{1}{2}(7x+5-|5-5x|)$.

Поэтому уравнение можно записать в виде $\dfrac{1}{2}(x+3+|3x-3|)=\dfrac{1}{2}(7x+5-|5-5x|)$,

$x+3+|3x-3|=7x+5-|5-5x|$, $4|x-1|=3x+1$. Отсюда получаем $x=5$ или $x=3/7$.

Ответ: $5;\ 3/7$.

Решите уравнения и неравенства:

1. $\max\left\{\frac{1}{x};5x-4\right\} \geq x^2.$ Ответ: $(0;4]$.
2. $\max\left\{|x|;x^2-7x\right\} \leq 8.$ Ответ: $[-1;8]$.
3. $\max(x;2-x) = \min(3x;1+2x).$ Ответ: $1/2$.
4. $\min\left(1-x^2;\frac{1-x}{2}\right). > \frac{1}{2}.$ Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0.$
5. $\max(2x+1;x+2). > -1.$ Ответ: $x > -3.$
6. $\max(2x;1-3x) = 1.$ Ответ: 0; $1/2$.
7. $\max(x;1) - \min(2x;3) = 4.$ Ответ: $-3/2;7.$
8. $\max(2x;3-4x) + 2\min(x-2;4+x) = 10.$ Ответ: $-11/2;7/2.$
9. $-\frac{1}{\max(x;2)} + \frac{1}{\min(x-1;x)} = \frac{1}{12}.$ Ответ: 4.
10. $\frac{1}{\min(x+3;2x)} - \frac{1}{\max(x;2-x)} = -\frac{1}{2}.$ Ответ: -2; 1.
11. $\min\left\{\frac{1}{x^2};3x^2-2\right\} \leq x.$ Ответ: $[-2/3;0) \cup (0;+\infty).$
12. $\min\left\{|x|;x^2+6x\right\} \geq 7.$ Ответ: $(-\infty;-7] \cup [7;+\infty).$
13. $\min\left\{2x^2-x-4;x^2+3x+1\right\} = 3x+12.$ Ответ: $4;-\sqrt{11}.$
14. $\max\left\{x^2+x-5;-2x^2+7x+4\right\} = x-1.$ Ответ: $-2;\frac{3-\sqrt{19}}{2}.$

9. Задание фигур на координатной плоскости уравнениями и неравенствами

Изобразите на плоскости ХОУ множество точек (*x*; *y*), координаты *x* и у каждой из которых удовлетворяют уравнению и неравенству:

1. $y - |x| + 1 = 0.$
2. $|x| + |y| - 1 > 0.$
3. $|y| - x = 2.$
4. $|x - y| < 2.$
5. $y + |x| - |x+2| = 0.$
6. $|x| - |y| \geq 1.$
7. $|x| + |y| = 1.$
8. $|x| + |y| \leq 3.$
9. $|x-1| + |y| = 2.$
10. $|x+1| + |y-1| \geq 3.$
11. $|x+y-1| + |x-y+1| = 0.$
12. $|x+y| + |x-y| \leq 2..$
13. $|x-y| + |x+y| = 4.$
14. $x^2 + y^2 - 2|x| - 2|y| \leq 2.$
15. $|y-x| + x + y = 2.$
16. $\log_x\left(\log_y|x|\right) > 0.$
17. $\log_x|y| = 2.$
18. $x^2 + y^2 \leq 2(|x| - |y|).$
19. $(|x|-1)^2 + (y-2)^2 = 4.$
20. $3|x-y| \geq 2 + (x-y)^2.$
21. $|y| = x^2 - x.$
22. $|y| \leq |2x^2 - x|.$
23. $y^2 = |x+y|.$
24. $|y - x^2| \leq 1.$
25. $|y| = 5^{\left|\log_{\frac{1}{5}} x\right|}.$
26. $|x^2 + y| \leq y + 1.$
27. $|y-x| + |y-x^2| = 2.$
28. $y \leq |4 + x^2 - 3x|.$

29. $\max(x;y)=\min(x^2;y^2)$.

30. $y+2<\sqrt{|x+1|}$.

31. $\max(x;y^2)=\min(x^2;y)$.

32. $(|x|-1)(y+2)<0$.

33. $|x|+\frac{1}{|x|}=|y|+\frac{1}{|y|}$.

34. $y\le\left|2-\sqrt{x+1}\right|$.

35. $|y|=|x^2-4x+3|$.

36. $|x|+|y|+|x-y|\le 2$.

37. $x|y|=-2$.

38. $|x-1|+|y+1|+|x+y|\le 2$.

39. $x|y|=-2$.

40. $x^2+y^2+3\le 4|x|$.

41. $|x|=y^2-2y$.

42. $x^2+y^2\le 4|y|$.

43. $|y|=\sin x$.

44. $(|x|+|y|-1)\cdot(x^2+y^2-2|x|)\ge 0$.

45. $|x|=\sin y$.

46. $\log_{|\sin x|} y>0$.

47. $(|x|+1)^2+(|y|-2)^2=9$.

48. $\log_{|x-1|-2|x|+4} y>\log_{|x-1|-2|x|+4}(4-x)$.

49. $|x|+|y|+|1-x-y|=1$.

50. $\log_{|x+1|-2|x-1|+6} y>\log_{|x+1|-2|x-1|+6}(x+4)$.

51. $y=\max(x;2)$.

52. $y=\min(x+1;2x-1)$.

53. $\max(x;2)=1$.

54. $\min(x-1;2)=3$.

Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости XOY условием:

1. $x^2+y^2+3\le 4|x|$. Ответ: 2π.

2. $|x|+|y|+|x-y|\le 2$. Ответ: 3.

3. $|x-2|+|y|\le 2$. Ответ: 8.

4. $|2-y|+|x|\le 3$. Ответ: 18.

5. $|3-x|+|y|\le 1$. Ответ: 2.

6. $|x+1|+|2y-x-1|\le 6$. Ответ: 36.

7. $|y-2x-1|+2|x|\le 3$. Ответ: 12.

8. $|2y+x+1|+|x+1|\le 4$. Ответ: 16.

9. $|y-2x|+|y+2x|\le 2$. Ответ: 2

10. $2|x|+|y+2x+1|\le 5$. Ответ: 25.

11. $x^2+y^2\le 2|x|+4|y|$. Ответ: $10\pi+16$.

12. $x^2+y^2\le 6|x|-6|y|$. Ответ: $18\pi-36$.

13. $x^2+y^2+4(x-|y|)\le 0$. Ответ: $12\pi+8$.

14. $x^2+y^2\le 4|y|$. Ответ: 8π.

15. $x^2+y^2+3\le 4|x|$. Ответ: 2π.

16. $|x|+|y|+|x-y|\le 2$. Ответ: 3.

17. $\begin{cases} y\le 4-|x|, \\ y\ge 1+\frac{1}{2}|x|. \end{cases}$ Ответ: 6.

18. $\begin{cases} y\le 5+2|x|, \\ y\ge 3+4|x|. \end{cases}$ Ответ: 2.

19. $\begin{cases} x^2+y^2\le 4(x+y-1), \\ y\ge |x-2|. \end{cases}$ Ответ: $2\pi+4$.

20. $\begin{cases} y\le 5-2|x|, \\ y\ge 2-\frac{1}{2}|x|. \end{cases}$ Ответ: 6.

21. $\begin{cases} |x-1|+|y-1|\ge 1, \\ |x-2|+|y-2|\le 2. \end{cases}$ Ответ: 7.

22. $\begin{cases} |x-y|\le 1, \\ (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\le 0. \end{cases}$ Ответ: 1.

<u>10. Уравнения и неравенства с параметрами</u>

Для всех значений параметра *a* решите уравнения и неравенства:

1. $|2a-x|=3+2a$.

Ответ: Если $a<-\frac{3}{2}$, то $x\in\varnothing$;

2. $|x+2a|=a+1-x$.

Ответ: Если $a<-\frac{1}{3}$, то $x\in\varnothing$;

Ответ:если $a=-\frac{3}{2}$, то $x=-3$;

если $a>-\frac{3}{2}$, то $x\in\{-3;4a+3\}$.

Ответ:если $a=-\frac{1}{3}$, то $x\le\frac{2}{3}$;

если $a>-\frac{1}{3}$, то $x=\frac{1-a}{2}$.

3. $|2x-3a|=3a-4x$.

Ответ: Если $a\le 0$, то $x=a$;

если $a>0$, то $x=0$.

4. $|x+2a|+|x-a|<3x$.

Ответ: Если $a<0$, то $x\in(-a;+\infty)$;

если $a\ge 0$, то $x\in(a;+\infty)$.

5. $\left|a+x^2\right|=3a$.

Ответ: Если $a<0$, то $x\in\varnothing$;

если $a=0$, то $x=0$;

если $a>0$, то $x=\pm\sqrt{2a}$.

6. $|x+a|<3a+2$.

Ответ: Если $a\le-\frac{2}{3}$, то $x\in\varnothing$;

если $a>-\frac{2}{3}$, то $x\in(-4a-2;2a+2)$.

7. $|x+3|-a|x-1|=4$.

Ответ: При $|a|>1$ $x=1$; при $a=1$ $x\ge 1$;

при $|a|<1$ $x_1=1, x_2=\frac{a+7}{a-1}$;

при $a=-1$ $-3\le x\le 1$.

8. $|x-3a|>1-a$.

Ответ: Если $a>1$, то $x\in R$;

если $a=1$, то $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$;

если $a<1$, то $x\in(-\infty;4a-1)\cup(2a+1;+\infty)$.

9. $|3x-1|-|2+x|=2x+a$.

Ответ: Если $a<-3$, то $x\in\varnothing$;

если $a=-3$, то $x\ge\frac{1}{3}$;

если $-3<a<11$, то $x=-\frac{1+a}{6}$;

если $a\ge 11$, то $x=-\frac{a-3}{4}$.

10. $x^2+3x=|a(x+3)|$.

Ответ: Если $a\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$, то

$x_1=-3,\ x_2=-a,\ x_3=a$;

если $a\in[-3;3]$, то $x_1=-3,\ x_2=|a|$.

11. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение:

1. $a(x-1)=|x|$. Ответ: $a\le 0; a>1$.
2. $\big||x|-1\big|=-|a-x|+1$. Ответ: $-2\le a\le 2$.
3. $81^{|x+1|}-2\cdot 9^{|x+1|}+a=0$. Ответ: $a\le 1$.
4. $\log_{100}x^2=\log_{\sqrt{x}}10\cdot\left(\lg 10a-\left|\lg\frac{x}{a}\right|\right)$. Ответ: $a\ge 10^{1-\sqrt{3}}$.

12. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет два различных корня:

1. $\lg(ax)=2\lg(x+1)$. Ответ: $a>4$.
2. $\log_2\left(4^x-a\right)=x$. Ответ: $-1/4<a<0$.
3. $x+\log_{1/3}\left(9^x-2a\right)=0$. Ответ: $-1/8<a<0$.
4. $\left|x-\sqrt{x}\right|=a-3$. Ответ: $a=3; a=13/4$.

13. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет решение, и найти эти решения:

1. $\big||4x-3|-5\big|+6x^2+12a^2x+6a^4=0$. Ответ: $x=-\frac{1}{2},\ a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $\sqrt{9-|3x+2|}+20a^2x^2+20|a|x+5=0.$ Ответ: $x=-\frac{11}{3},\ a=\pm\frac{3}{22}.$

3. $\left||2x+3|-7\right|+9ax^2=6\sqrt{a}x-1.$ Ответ: $x=2,\ a=\frac{1}{36}.$

4. $\sqrt{9-|5x+1|}+3a^2x^2+12|a|x+12=0.$ Ответ: $x=-2,\ a=\pm1.$

14. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет более двух решений:

1. $|2x+\cos\pi a|+|ax-\sin\pi a|=a^2+3a+3.$ Ответ: $a=-2.$
2. $\left|ax+\log_3|a|\right|+\left|2^a-3x\right|=a^2-2a+6.$ Ответ: $a=3.$
3. $\left|2ax-a^2\right|+\left|\frac{a(a-1)}{2}-8x\right|=20\log_{|a|}2.$ Ответ: $a=4.$
4. $|x+tg\,\pi a|+\left|a^3x-\cos\pi a\right|=2a^2+a.$ Ответ: $a=-1.$

Опорная информация: Пусть параметр(ы) таков(ы), что система имеет единственное решение $(x_\circ;y_\circ)$. Тогда $(-x_\circ;y_\circ)$ - тоже решение системы, совпадающее с $(x_\circ;y_\circ)$ (ибо последнее единственно). Значит, $x_\circ=-x_\circ \Leftrightarrow x_\circ=0$ и можно подставить $x_\circ=0$ в данную систему и найти $y_\circ$ и праметр(ы). После этого необходимо убедиться, что найденные значения параметров удовлетворяют условию задачи. Для этого их надо подставить в исходную систему и проверить, будут ли решение $(x_\circ;y_\circ)$ единственным.

15. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система имеет единственное решение:

1. $\begin{cases}3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$ Ответ: $a=\frac{4}{3}.$

2. $\begin{cases}5\cdot 2^{|x|}+3|x|-2=5y+3x^2-5a,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$ Ответ: $a=\frac{2}{5}.$

16. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение, и найти это решение:

1. $\begin{cases}(2^{\sqrt[3]{x}-1}+(0{,}5)^{\sqrt[3]{x}+1})\cdot(a-1)=y+\cos 2x,\\ 2^{|\sin x|}+|y|=2.\end{cases}$ Ответ: $a=3;\ x=0,\ y=1.$

2. $\begin{cases}(1+arctg|y|)\cdot(a+1)=x+3^{-tg^2\frac{y}{2}}-2,\\ x^2-4x+4=\cos y.\end{cases}$ Ответ: $a=1;\ x=3,\ y=0.$

3. $\begin{cases}\left(2-2^{-|x|}\right)\cdot a=y+1+2^{-\sin^2 x},\\ 3^{|tgx|+1}+|y+1|=4.\end{cases}$ Ответ: $a=2;\ x=0,\ y=0.$

4. $\begin{cases}\left(2+\arcsin y^2\right)\cdot(a+1)=x+2\cos\frac{y}{2},\\ 2^{\sin^2\frac{y}{2}}+|x|=3.\end{cases}$ Ответ: $a=1;\ x=2,\ y=0.$

17. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases}x^2+y^2+31\le 8(|x|+|y|),\\ x^2+y^2-2y=a^2-1\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $4 \le |a| \le \sqrt{41} + 1$.

18. При каких значениях параметра a система неравенств имеет ровно два решения?

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2ay - a^2 + 1, \\ y + a \le |x| \end{cases}$ Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2ay - a^2 + 1, \\ y + a \le |x| \end{cases}$ Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = x^2 - 4 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

Ответ: 4.

20. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет ровно три различных решения:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1, \\ |x-1| + |x+1| - 2y = 0 \end{cases}$ Ответ: $2 + \sqrt{2}$.

2. $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 2ay = -2a, \\ |x| + |x-2| - 2y = 0 \end{cases}$ Ответ: $2 + \sqrt{2}$.

3. $\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 2ay + 2a = -3, \\ |x-1| + |x-3| - 2y = 0 \end{cases}$ Ответ: $2 + \sqrt{2}$.

4. $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 2ay = -2a, \\ |x| + |x+2| - 2y = 0 \end{cases}$ Ответ: $2 + \sqrt{2}$.

5. $\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ Ответ: -7.

21. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2cos^2x + \left(5a + \frac{1}{a+1}\right)|sinx| = a^2 - 6a + 2$$

имеет единственное решение на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $a = 6$.

22. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3cos^2x + \left(4a + \frac{1}{a+1}\right)|sinx| = a^2 - 4a + 3$$

имеет единственное решение на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $a = 4$.

11. Множество значений функции.

Найдите области (множества) значений функций:

1. $y = \sqrt{12 - |x^2 + 4x + 7|}$.
   Ответ: $[0;3]$.

2. $y = \frac{x(x-2)}{|x|}$.
   Ответ: $(-2;+\infty)$.

3. $y = |\sin x + \cos x| - \sqrt{2}$.
   Ответ: $[-\sqrt{2};0]$.

4. $y = |tg \cos x - 3|$.
   Ответ: $(2;4)$.

5. $y=\frac{x+2}{|x-1|}$.

Ответ: $(-1;+\infty)$.

6. $y=\frac{|x-2|-1}{x}$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup[-0,5;+\infty)$.

7. $y=\frac{6}{3-|x|}$.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup[2;+\infty)$.

8. $y=4^{-|x|}-\frac{5|x|}{x}$, если $x\ge -1$.

Ответ: $(-5;-4)\cup[5{,}25;6)$.

9. $y=\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{10+\log_7(7+|x|)}{77}\right)$.

Ответ: $(-\infty;1]$.

10. $y=\log_4(16+|x|)-\frac{3|x|}{x}$, если $x\le 48$.

Ответ: $(-1;0]\cup(5;+\infty)$.

11. $y=-\log_{\frac{1}{3}}(3+|x|)+\frac{4x}{|x|}$, если $x\ge -78$.

Ответ: $(-3;0]\cup(5;+\infty)$.

12. $y=\log_{0,5}\frac{24}{11+\sqrt{1+|\ln x|}}$.

Ответ: $[-1;+\infty)$.

Найдите наименьшие значения функций:

1. $y=\log_{0,25}(4-|2x+15|)$.

Ответ: -1.

2. $y=\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{27}-|x|\right)$.

Ответ: 1,5.

3. $y=\sqrt[5]{2^{|x|}-33}$.

Ответ: -2.

4. $y=2|x-3|+|3x-2|$.

Ответ: 14/3.

Найдите наименьшие значения функций:

1. $y=\left(5^{-|x|}-0{,}3\right)^2$.

Ответ: 0.49.

2. $y=|5\sin x-\cos 2x-7|$.

Ответ: 11.

3. $y=x|x|-x^2$.

Ответ: 0.

4. $y=\frac{5}{2^{|x|}+1}$.

Ответ: 2,5.

5. $y=|x-3|+|x|-|x+3|+|x+5|$.

Ответ: $y_{наим}=5$ при $0\le x\le 3$.

6. $y=|x-1|+3|x-2|-|x-3|-2|x|$.

Ответ: $y_{наим}=-4$ при $x=2$.

12. Графики функций, содержащих переменную под знаком модуля

Постройте графики функций:

1. $y=|x-1|+|x-2|+x$.
2. .$y=|x-1|+|x-2|$
3. $y=|x-3|+|1-x|-4$.
4. $y=7-|x-1|+|x+5|$.
5. $y=\left|\frac{1}{3}x-2\right|+\left|3+\frac{2}{3}x\right|-3$.
6. $y=\frac{|x|}{x}+2\frac{|x-1|}{x-1}$.
7. $y=2x+3\frac{|x-2|}{x-2}$.
8. $y=\frac{|x-1|}{x-1}$.
9. $y=x+|x|$.
10. $y=x-3+|x+2.|$.
11. $y=x^{\frac{|x+1|}{x+1}-\frac{|x-1|}{x-1}}$.
12. $y=\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{|x-3|}{x-3}$.
13. $y=|2x-5|+3x-1$.
14. $y=|x-1|+|x|$.
15. $y=|x+2|-|x|+|x-2|$.
16. $|y-2|=3x-4$.
17. $y=x|y|$.
18. $y=|x-1|+|x+1|$.

19. $y=|x|+|x-2|.$

20. $y=|x-2|+3.$

21. $y=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x+1+|x+1|}{2x+2}.$

22. $y=\sqrt[3]{x}\cdot\dfrac{|x^3-x|}{x^3-x}.$

23. $y=|x-5|+|x-2|.$

24. $y=|x-2|+|x-3|-1.$

25. $y=|x+1|+|x+2|-|x|+2|x-2|.$

26. $y=\big||x-2|-1|-3\big|+2.$

27. $y=\big|||1-|x||-3|-2\big|.$

28. $y=||x-2|-3|-1.$

29. $y=\big|||x|-3|-2\big|.$

30. $y=||x+2|-4|.$

31. $y=\left(4-x^2\right)\cdot\dfrac{|x|}{x}.$

32. $y=\left(x+\dfrac{|x|}{x}-1\right)^2.$

33. $y=1+\left(2x-x^2\right)\cdot\dfrac{x+|x|}{2x}.$

34. $y=2\cdot\dfrac{|x+2|}{x+2}+x\cdot\dfrac{|x-1|}{x-1}-\dfrac{|x-3|}{x-3}.$

35. $y=x^2\cdot\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x\cdot\dfrac{|x-1|}{x-1}-\dfrac{|x-2|}{x-2}.$

36. $y=\dfrac{8}{x}\cdot\dfrac{|x^2-2x-8|}{x^2-2x-8}.$

37. $y=\left(x^2+2x-1\right)\cdot\dfrac{|x^3+x^2-2x|}{x^3+x^2-2x}.$

38. $y=\left|x+\sin^2 x\cdot\left(1+ctg^2 x\right)\right|.$

39. $y=\left(x^2-4\right)\cdot\dfrac{\sin|\pi x|}{\sin\pi x}.$

40. $y=\dfrac{|x|}{x}\cdot 2^x.$

41. $y=(x+2)^{2^{-\frac{|x|}{x}}}.$

42. $y=\arccos\dfrac{|x|}{x}-1.$

43. $y=\dfrac{tg\left(\pi|x-2|\right)}{tg\,\pi x}\cdot\log_{\frac{1}{2}}x.$

44. $y=\sqrt{x+4}\cdot tg\,\dfrac{\pi|x|-\pi x}{8x}.$

45. $y=\dfrac{\sin\left(\pi|x-3|\right)}{\sin\pi x}\cdot\left(x^2-4x+1\right).$

46. $y=\log_{0,5}(x+1)\cdot tg\,\dfrac{\pi|x|+\pi x}{8x}.$

47. $y=\left(3-tg\,\dfrac{2\pi x-\pi|x|}{4x}\right)^x.$

48. $y=\sin\left(\dfrac{\pi x-\pi|x|}{4x}\right)\cdot x^2+\cos\left(\dfrac{\pi x-\pi|x|}{4x}\right)\cdot\sin x.$

49. $y=\cos x+\left(0{,}5^x-\cos x\right)\cdot tg\,\dfrac{\pi x+\pi|x|}{8x}.$

50. $y=ctgx-\left(x^2+ctgx\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{|x|}{x}\right).$

13. Системы уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

Решите систему уравнений и неравенств:

1. $\begin{cases}\log_3(5+2x)+\log_3(-x-y-3)=1,\\ |-x-y-3|-|-2x-5|=-7x+y-6.\end{cases}$ Ответ: $(-1;-3)$, $\left(-\dfrac{13}{6};-\dfrac{16}{3}\right)$.

2. $\begin{cases}\log_5(x-y+7)+\log_5(5-2y)=\log_5 15,\\ |x-y+7|-|2y-5|=1-x.\end{cases}$ Ответ: $(-1;1)$.

3. $\begin{cases}x^3\cdot 2^{x-2}+2^{|x-3|+4}\ge x^3\cdot 2^{|x-3|+1}+2,\\ \left(\sqrt{5}-2\right)^{-3x^2-2}>\left(\sqrt{5}+2\right)^{9x+|x-3|}.\end{cases}$ Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{4-\sqrt{19}}{3}\right)\cup[3;+\infty)$.

4. $\begin{cases}y^2-|xy|+2=0,\\ 8-x^2=(x+2y)^2.\end{cases}$ Ответ: $\left(2\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

5. $\begin{cases} 3\log_3|x| - \log_2 y^2 = 4, \\ \log_3 x^2 + \log_2 y = 5. \end{cases}$ Ответ: $(9;2),\ (-9;2).$

6. $\begin{cases} \log_5 x^2 - 3\log_2|y| = 8, \\ \log_5 x - 0{,}5\log_2 y^2 = 3. \end{cases}$ Ответ: $\left(5;\frac{1}{4}\right),\ \left(5;-\frac{1}{2}\right).$

7. $\begin{cases} 9^x - 4\cdot 3^x + 3 \geq 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}}|x| \leq 0. \end{cases}$ Ответ: $\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\{1\}.$

8. $\begin{cases} 4^{x+1} - 17\cdot 2^x + 4 \leq 0, \\ \log^2_{|ч|} x^2 + \log_2 x^2 \leq 6. \end{cases}$ Ответ: $[-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2].$

9. $\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x|, \\ tg^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$ Ответ: $(0;1).$

10. $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ Ответ: $(0;1).$

11. $\begin{cases} \sqrt{2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}} = \sqrt{3^{-y-4}}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8. \end{cases}$ Ответ: $(-1;-3),\ (3;-3).$

12. $\begin{cases} 5^{|x^2-5x+4|-\log_5 2} = 2^{y-3}, \\ 3|y| - |y+1| + (y-2)^2 \leq 3. \end{cases}$ Ответ: $(1;2),\ (4;2).$

14. Нестандартные уравнения и неравенства с модулями

Решите уравнения и неравенства:

1. $\log_3\left(4 - \left|\cos\frac{4x}{3}\right|\right) = \sin x.$ Ответ: $x = -\frac{3\pi}{2} + 6\pi n, n \in Z.$

2. $\sin\frac{\pi}{x^2+6x+13} = \frac{\log_3|x| + \log_{|x|} 3}{2\sqrt{2}}.$ Ответ: $x = -3.$

3. $\left|\sqrt{2}|x| - 1\right|\log_2\left(2 - x^2\right) \geq 1.$ Ответ: $x = 0.$

4. $2^{|x|} = \sin x^2.$ Ответ: $x = 0.$

5. $3^{|x|} = \cos\frac{x}{3}.$ Ответ: $x = 0.$

6. $3^{|\sin\sqrt{x}|} = |\cos x|.$ Ответ: $x = 0.$

7. $2^{1-|x-1|} = x^2 - 2x + 3.$ Ответ: $x = 1.$

8. $2^{1-|x-1|} = tg\pi x + ctg\pi x.$ Ответ: $x = 1/4.$

9. $\log_{\frac{1}{3}}\left(3 + |\sin x|\right) = 2^{|x|} - 2.$ Ответ: $x = 0.$

10. $\log_2\left(3 - |\sin x|\right) = 2^{-|\pi - 2x|}.$ Ответ: $x = \pi/2.$

11. $\log_3\left(\frac{1}{3} - \left|\frac{3\pi}{2} - x\right|\right) = \sin x.$ Ответ: $x = 3\pi/2.$

12. $2^{-|x-2|}\cdot\log_2\left(4x - x^2 - 2\right) \geq 1.$ Ответ: $x = 2.$

13. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 4 - \left|\sin\frac{\pi}{4}(x-1)\right|.$ Ответ: $x=-1$.

14. $|tgx| + \frac{1}{|tgx|} \le 2 - x^2 + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{16}.$ Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

15. $|\sin x| + \frac{1}{|\sin x|} \le 2 - x^2 - \pi x - \frac{\pi^2}{4}.$ Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

Контрольные работы по теме «Уравнения и неравенства с модулями»

Контрольная работа №1 (базовый уровень)

Вариант 1

1. Решить уравнение: $|x+7| = 10.$
2. Решить неравенство: $|x+3| > 5.$
3. Решить неравенство: $x^2 - 3 \ge 2|x|.$
4. Решить неравенство: $|x+1| - |4-x| > 4.$
5. Решить неравенство: $|3 - |x-2|| \le 2x.$
6. Решить неравенство: $|x^2 - 6x + 8| > 3x - x^2.$

Вариант 2

1. Решить уравнение: $|x+5| = 13.$
2. Решить неравенство: $|x+2| > 7.$
3. Решить неравенство: $x^2 - 8 \ge 2|x|.$
4. Решить неравенство: $|x+3| - |1-x| \le 3.$
5. Решить неравенство: $|2 - |x+1|| \le -2x.$
6. Решить неравенство: $|x^2 - 2x - 8| \ge 2x.$

Ответы.

Вариант 1. 1) -17; 3. **2)** $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$. **3)** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **4)** $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. **5)** $[1;+\infty)$.

6) $\left(-\infty;\frac{9-\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$.

Вариант 2. 1) -18; 8. **2)** $(-\infty;-9)\cup(5;+\infty)$. **3)** $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$. **4)** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **5)** $(-\infty;-1]$.

6) $(-\infty;2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{3};+\infty)$.

Контрольная работа № 2 (углубленный уровень)

Вариант 1

1. Решить уравнение: $|||x+3|-1|+2|-3=0.$
2. Решить неравенство: $|x| + |7-x| + 2|x-2| < 8.$
3. Решить неравенство: $|x^2-1| - |x+1| \le 0.$
4. Для каждого значения параметра *a* решить уравнение: $|x+2| + 2|x-3| - a = 0.$
5. Для каждого значения параметра *a* решить неравенство: $\left|x-\frac{c}{2}\right| - c > \left|x - \frac{3c}{2}\right|.$

Вариант 2

1. Решить уравнение: $|||x+4|-1|+3|-4=0.$
2. Решить неравенство: $2|x| + |5-x| + |x+2| \le 10.$
3. Решить неравенство: $|x^2-4| - |x+2| \le 0.$
4. Для каждого значения параметра *b* решить уравнение: $|2x-1| - \frac{b}{2} = -|2-x|.$
5. Для каждого значения параметра *a* решить неравенство: $|x-a| - |x-3a| < 2a.$

Ответы.

Вариант 1. 1) -5; -3; -1. **2)** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **3)** $\{-1\}\cup[0;2]$. **4)** $x\in\varnothing$, если $a<5$; $x=3$, если $a=5$; $x_1=8-a, x_2=\frac{4+a}{3}$, если $a\in(5;10)$; $x_1=\frac{4-a}{3}, x_2=\frac{4+a}{3}$, если $a\ge 10$. **5)** $x\in\left(-\infty;\frac{c}{2}\right)$, если $c<0$; $x\in\varnothing$, если $c\ge 0$.

Вариант 2. 1) -6; -4; -2. **2)** $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$. **3)** $\{-2\}\cup[1;3]$. **4)** $x\in\varnothing$, если $b<3$; $x=\frac{1}{2}$, если $b=3$;

$x_1=1-\frac{b}{6}, x_2=\frac{b}{2}-1$, если $b\in(3;6)$; $x_1=1-\frac{b}{6}, x_2=1+\frac{b}{6}$, если $b\ge 6$.

5) $x\in(-\infty;3a)$, если $a>0$; $x\in\varnothing$, если $a\le 0$.

Список и источники литературы

1. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011.
2. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.
3. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В.Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2011.
4. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами. // Математика в школе. 2011. №1. – стр. 18-26. и 2011. №2. – стр. 25-32.
5. Неравенства с двумя переменными: графическое и аналитическое решения / А. Корянов. – М.: Чистые пруды, 2008. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 22).
6. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Различные подходы к решению задач С5 ЕГЭ. // «Математика», 2011, № 5. − стр.11–21.
7. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Ителлект- Центр, 2010.
8. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. Учебное пособие. – М.: МИЭТ, 2004. – 256 стр.
9. Фалин Г., Фалин А. Инвариантность и задачи с параметрами. // Квант. 2007. №5, – с. 45.
10. М.И. Сканави. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебн. пособие. – 3-е изд., доп. – М.: Высш. школа, 1978. – 519 с.
11. СИ. Колесникова. Алгебраические уравнения и неравенства, системы алгебраических уравнений и неравенств, г. Долгопрудный, 2002г.
12. СИ. Колесникова. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 272 с. – (Домашний репетитор: Подготовка к ЕГЭ).
13. М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко Конкурсные задачи по математике: Справ. пособие. – Изд. 3-е, стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 416 с.
14. И.Т. Бородуля. Показательная и логарифмическая функции (задачи и упражнения): Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1984. – 112 с.
15. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2010, 2011 (открытый банк заданий).
16. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлении в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
17. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.